DEVOIR SURVEILLE n°4

• Exercice n°1 :

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice ; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous nous donne la charge maximale y_i, en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i, en mètres, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
   a) Représenter le nuage de points $M(x_i ; y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Construire cette droite sur le graphique précédent.
   c) Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.

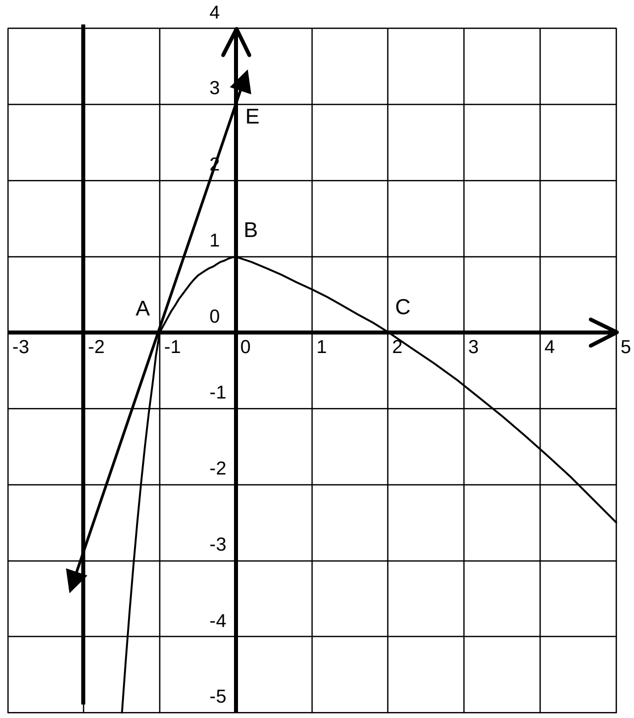
2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$
   a) Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
y_i	0,100									

   b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près)
   c) En se fondant sur les résultats obtenus en 2.b), calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$.
   En déduire la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.
   d) Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1.d) ? Pourquoi ?

• Exercice n°2 :

La courbe suivante représente une fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$



On suppose de plus que f est une fonction :

- Définie et dérivable sur $]-2\,;+\infty[$,
- Croissante sur $]-2\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$,
- Ayant pour limite $-\infty$ quand x tend vers -2 et quand x tend vers $+\infty$.

On admet que :

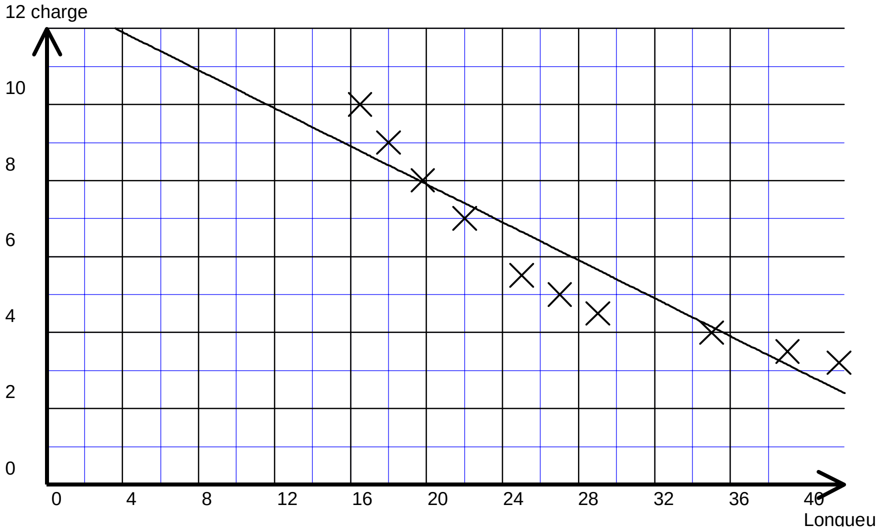
- A, B et C sont des points de cette courbe à coordonnées entières,
- La tangente à la courbe représentative de f au point A passe par le point E,
- La tangente à la courbe représentative de f au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Dans cette question, on donnera les résultats sans justification, en s'appuyant sur l'observation du graphique et les indications fournies par le texte
   a) Déterminer : $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$; $f'(-1)$ et $f'(0)$.
   b) Donner le signe de $f'(x)$, puis celui de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.
2. On définit sur $]-2\,;+\infty[$ la fonction g définie par : $g(x) = [f(x)]^2$
   a) Calculer $g(-1)$; $g(0)$ et $g(2)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   c) On rappelle que $g'(x) = 2f'(x)f(x)$. Etudier le signe de $g'(x)$ en utilisant un tableau de signes, puis dresser le tableau de variations de g en indiquant les limites calculées en 2.b).
3. A partir du tableau de variations de g, donner le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = \dfrac{3}{2}$ en justifiant la réponse.

Correction du DS n°4

Exercice n°1

1. a)



b) On trouve a = – 0,25 et b = 12,90

soit : $\boxed{y = -0{,}25x + 12{,}90}$

La droite passe par le point A(0 ; 12,90) et B(40 ; 2,9)

c) Si $x = 26$, on obtient $y = -0{,}25 \times 26 + 12{,}90 = 6{,}4$

$\boxed{\text{La charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres est de 6,4 tonnes}}$

2. a)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
y_i	0,100	0,111	0,125	0,143	0,182	0,2	0,222	0,25	0,286	0,312

b) On trouve a = 0,0083 et b = – 0,0355 (ou – 0,0359)

donc, $\boxed{z = 0{,}0083x - 0{,}0355}$

c) $z = 0{,}0083 \times 26 - 0{,}0355 = 0{,}1803$

On a alors $y = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{0{,}1803} = 5{,}5$

Dans ce cas, $\boxed{\text{la charge maximale est de 5,5 tonnes}}$

d) Oui, cela est plus cohérent : en effet, si l'on regarde l'allure de la courbe formée par le nuage de point, on remarque qu'elle ne se rapproche pas tout à fait de la première droite, et en 26, les points semblent situés en dessous de cette droite, donc la première approximation est sur-évaluée.

Exercice n°2

1. a) $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(2) = 0$; $f'(-1) = 3$; $f'(0) = 0$

   b) f' est positive sur $]-2\,;0\,]$ et négative sur $[\,0\,;+\infty\,[$
   f est positive sur $[-1\,;2\,]$ et négative sur $]-2\,;-1\,] \cup [\,2\,;+\infty[$

2. a) $g(-1) = 0^2 = 0$; $g(0) = 1^2 = 1$; $g(2) = 0^2 = 0$

   b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$
   De même, $\lim\limits_{X \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc, $\lim\limits_{X \to -\infty} g(x) = +\infty$

   c)

x	-2		-1		0		2		+∞
2		+		+		+		+	
$f'(x)$		+		+	0	−		−	
$f(x)$		−	0	+		+	0	−	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

x	-2		-1		0		2		+∞
g'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
g(x)	+∞	↘	0	↗	1	↘	0	↗	+∞

3.
∘ g est continue et strictement décroissante de $]-2\,;-1\,]$ dans $[\,0\,;+\infty[$.
Or, $\frac{3}{2} \in [\,0\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$g(x) = \frac{3}{2}$ admet une unique solution dans $]-2\,;-1\,]$.

∘ g est continue sur [-1 ; 2], et admet comme maximum 1. Donc, l'équation $g(x) = \frac{3}{2}$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.
∘ g est continue et strictement croissante de $[\,2\,;+\infty\,[$ dans $[\,0\,;+\infty\,[$.
Or, $\frac{3}{2} \in [\,0\,;+\infty\,[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$g(x) = \frac{3}{2}$ admet une unique solution dans $[\,2\,;+\infty\,[$.

Conclusion : $\boxed{\text{il y a deux solutions}}$.