Classe : TES1 Pour le 20/05/2003

# MATHEMATIQUES

Devoir maison N°7

---

**Exercice : Etude d'une série statistique**

**PARTIE A**

Le nombre d'utilisateurs de téléphone portable en France est donné par le tableau suivant :

| Mois | 12/1996 | 10/1997 | 05/1998 | 10/1998 | 02/1999 | 07/1999 | 09/1999 | 03/2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ | 0 | 10 | 17 | 22 | 26 | 31 | 33 | 39 |
| Millions d'utilisateurs $y_i$ | 2,5 | 4,5 | 7,2 | 9,4 | 12 | 15 | 16,2 | 22,6 |

*Les calculs seront effectués avec la calculatrice, aucun détail de ces calculs n'est demandé.*

1. **Réalisation d'un ajustement affine**
   (a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal où 1cm représente quatre mois sur l'axe des abscisses, 1cm représente 1 million d'utilisateurs sur l'axe des ordonnées.
   (b) D'après le nuage de points, un ajustement affine parait-il justifié ?
   (c) Placer le point moyen $G$ de cette série $(x_i; y_i)$, après avoir déterminé ses coordonnées.
   (d) Donner l'équation de la droite $(D)$ de régression de $y$ en $x$, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, $a$ et $b$ étant arrondis à $10^{-2}$ près. Tracer cette droite $(D)$ sur le graphique précédent.
2. **Réalisation d'un autre ajustement**
   On considère le tableau suivant :

| Mois | 12/1996 | 10/1997 | 05/1998 | 10/1998 | 02/1999 | 07/1999 | 09/1999 | 03/2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ | 0 | 10 | 17 | 22 | 26 | 31 | 33 | 39 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | $\ln(2,5)$ | $\ln(4,5)$ | $\ln(7,2)$ | $\ln(9,4)$ | $\ln(12)$ | $\ln(15)$ | $\ln(16,2)$ | $\ln(22,6)$ |

   Soit la série statistique $(x_i; z_i)$, où $z_i = \ln(y_i)$.
   (a) On admet qu'une équation de la droite de régression de $z$ en $x$, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $z = 0,056x + 0,961$, avec $z = \ln(y)$. Exprimer $y$ en fonction de $x$. Mettre $y$ sous la forme $y = \alpha e^{0,056x}$. Donner la valeur décimale de $\alpha$ arrondie à $10^{-1}$ près.
   (b) Soit $g$ la fonction que l'on définit sur l'intervalle $[0; 50]$ par $g(x) = 2,6e^{0,056x}$. En vous aidant de la calculatrice, tracer avec soin et sans justification la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction $g$ sur le graphique précédent, pour $x$ compris entre 0 et 50.
3. A partir du graphique, quel ajustement semble être le meilleur ?

**PARTIE B**

On se propose de comparer par le calcul les deux ajustements. Pour cela on considère les fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur l'intervalle $[0; 50]$ par :
$f(x) = 0,5x + 0,08$;
$g(x) = 2,6e^{0,056x}$ ;
$h(x) = g(x) - f(x)$.

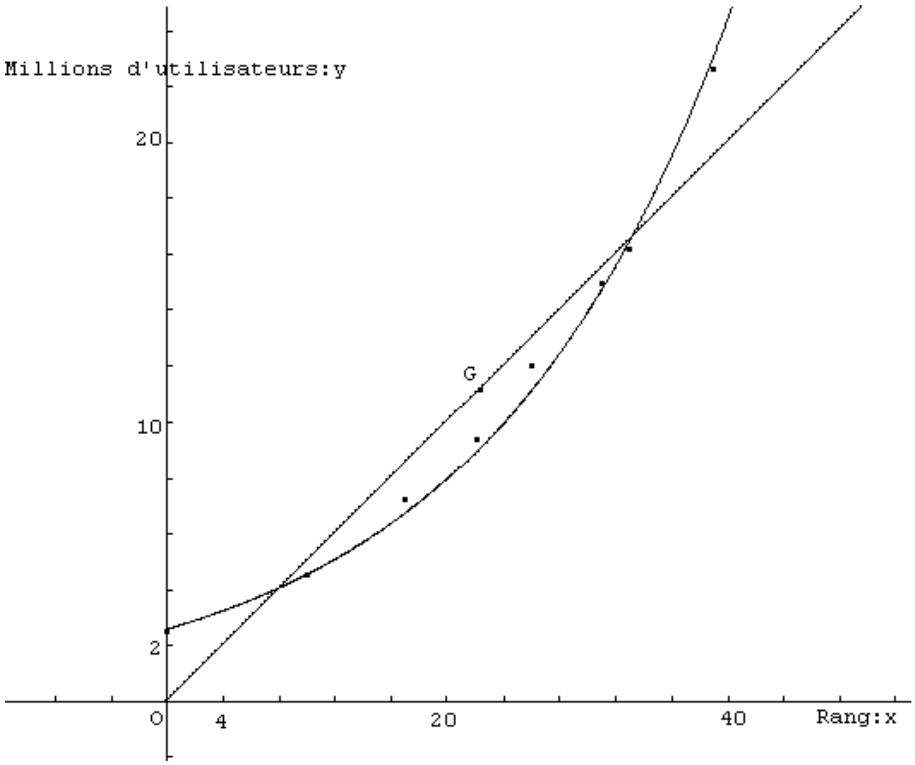
1. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 35$. En déduire l'année et le mois à partir desquels il y aura, d'après le second modèle, plus de 35 millions d'utilisateurs de téléphone portable en France.
2. (a) Soit $h'$ la fonction dérivée de la fonction $h$. Montrer que $h'(x) = 0,1456e^{0,056x} - 0,5$.
   (b) Résoudre l'équation $h'(x) = 0$. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi entier, de la solution $x_0$ de cette équation.
   (c) Justifier le signe de $h'(x)$, puis établir le tableau de variation de $h$ sur l'intervalle $[0; 50]$. On donnera les valeurs arrondies à $10^{-2}$ près de $h(0)$, $h(x_0)$, $h(50)$. Pour calculer $h(x_0)$, on remplacera $x_0$ par son arrondi entier.
   (d) En remarquant que $h'(x) = g'(x) - f'(x)$, montrer que $g'(x_0) = 0,5$.
   (e) Soit $(T)$ la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0$. Que dire des droites $(T)$ et $(D)$ ? Tracer la droite $(T)$.
   (f) Que représente la valeur $x_0$ lorsqu'on compare les fonctions $f$ et $g$ considérées dans chacun des deux ajustements ?
3. (a) En utilisant les variations de $h$, démontrer que la fonction $h$ s'annule pour deux valeurs $x_1$ et $x_2$ dans l'intervalle $[0; 50]$.
   (b) Encadrer $x_1$ par deux entiers successifs. Faire de même pour $x_2$.
   (c) Placer les valeurs $x_1$ et $x_2$ sur le graphique. Que représentent ces valeurs lorsqu'on compare les fonctions considérées dans les deux ajustements ?

# Correction du devoir maison N°7

## PARTIE A

1. **Réalisation d'un ajustement affine**

(a)




(b) Les points sont presque alignés, donc un ajustement affine parait justifié.

(c) $\overline{x} = 22,25$ et $\overline{y} = 11,175$
Donc les coordonnées du point moyen $G$ sont $(22,25; 11,175)$.

(d) Une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ est : $y = 0,5x + 0,08$.
Pour $x = 0$ , $y = 0,08$ ; pour $x = 40$ , $y = 20,08$

2. **Réalisation d'un ajustement exponentiel**

(a) On admet qu'une équation de la droite de régression de $z$ en $x$ est : $z = 0,056x + 0,961$ où $z = \ln y$
$\ln y = 0,056x + 0,961$ ce qui donne $y = e^{0,056x+0,961} = e^{0,056x}e^{0,961} = 2,6e^{0,056x}$ $\alpha \simeq 2,6$

(b) $g$ est la fonction définie sur $[0; 50]$ par : $g(x) = 2,6e^{0,056x}$.

(c) Les points placés à la question 1.(a) sont plus proche de la courbe $(\mathcal{C})$ que de la droite $(\mathcal{D})$. Donc l'ajustement exponentiel semble être le meilleur.

## PARTIE B

Soient $f$, $g$ et $h$ les fonctions définies sur $[0; 50]$ par :
$f(x) = 0,5x + 0,08$ , $g(x) = 2,6e^{0,056x}$ , $h(x) = g(x) - f(x)$

1. $g(x) \geq 35$ signifie $2,6e^{0,056x} \geq 35$ d'où $e^{0,056x} \geq \dfrac{35}{2,6}$

On a alors $0,056x \geq \ln\left(\dfrac{35}{2,6}\right)$ et $x \geq \dfrac{1}{0,056}\ln\left(\dfrac{35}{2,6}\right)$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\left[\dfrac{1}{0,056}\ln\left(\dfrac{35}{2,6}\right); 50\right]$

et $\dfrac{1}{0,056}\ln\left(\dfrac{35}{2,6}\right) \simeq 46,43$ donc d'après le second modèle, il y aura plus de 35 millions d'utilisateurs à partir du $47^{me}$ mois, c'est à dire à partir du mois de novembre 2000.

2. (a) $h$ est dérivable sur $[0; 50]$
$h(x) = g(x) - f(x)$ ; $g(x) = 2,6e^{0,056x} = 2,6e^{u(x)}$ où $u(x) = 0,056x$ ; $u'(x) = 0,056$
$g' = 2,6u'e^u$ ; $g'(x) = 2,6 \times 0,056e^{0,056x} = 0,1456e^{0,056x}$
$f(x) = 0,5x + 0,08$ ; $f'(x) = 0,5$
et $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0,1456e^{0,056x} - 0,5$

(b) $h'(x) = 0$ signifie $0,1456e^{0,056x} - 0,5 = 0$ et $e^{0,056x} = \dfrac{0,5}{0,1456}$

d'où $0,056x = \ln\left(\dfrac{0,5}{0,1456}\right)$ et $x = \dfrac{1}{0,056}\ln\left(\dfrac{0,5}{0,1456}\right)$

donc l'unique solution de l'équation $h'(x) = 0$ est $x_0 = \dfrac{1}{0,056}\ln\left(\dfrac{0,5}{0,1456}\right) \simeq 22$

(c) $h'(x) > 0$ nous donne $0,1456e^{0,056x} - 0,5 > 0$ d'où $x > x_0$

Tableau de variation de $h$ :

$h(0) = 2,6e^{0,056\times 0} - (0,5 \times 0 + 0,08)$
$= 2,6 - 0,08 = 2,52$
$h(50) = 2,6e^{0,056\times 50} - (0,5 \times 50 + 0,08)$
$= 2,6e^{2,8} - 25,08 \simeq 17,68$

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $50$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $h$ | $h(0)$ | ↘ | $h(x_0)$ | ↗ | $h(50)$ |

$h(x_0) \simeq 2,6e^{0,056\times 22} - (0,5 \times 22 + 0,08)$ ; $h(x_0) \simeq 2,6e^{1,232} - 11,08 \simeq -7,88$

(d) $h'(x_0) = 0$ et $f'(x) = 0,5$ pour tout réel $x$, d'où $f'(x_0) = 0,5$
alors $g'(x_0) - f'(x_0) = 0$ et $g'(x_0) = f'(x_0) = 0,5$

(e) $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de $g$
La tangente $(T)$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0$ a pour équation : $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$
et $g(x_0) \simeq 2,6e^{1,232} \simeq 8,91$
Une équation de $(T)$ est alors $y = 0,5(x - x_0) + 8,91$ ce qui donne $y \simeq 0,5x - 2,09$
$(T)$ et $(\mathcal{D})$ ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

(f) La valeur $x_0$ est le nombre pour lequel l'écart entre les deux estimations est le plus élevé avec $f(x) > g(x)$.

3. (a) $h$ est continue sur $[0; 50]$
• $h$ est strictement décroissante sur $[0; x_0]$
$h(0) \simeq 2,52$ et $h(x_0) \simeq -7,88$ ; $0 \in [h(x_0); h(0)]$
donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $x_1$ sur $[0; x_0]$
• $h$ est strictement croissante sur $[x_0; 50]$
$h(x_0) \simeq -7,88$ et $h(50) \simeq 17,68$ ; $0 \in [h(x_0); h(50)]$
donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $x_2$ sur $[x_0; 50]$

(b) $h(7) \simeq 0,27$ et $h(8) \simeq -0,01$ d'où $7 < x_1 < 8$
et $h(33) \simeq -0,08$ et $h(34) \simeq 0,373$ d'où $33 < x_2 < 34$

(c) Les valeurs $x_1$ et $x_2$ sont les nombres pour lesquels l'estimation est la même, que l'on choisisse $f$ ou $g$.