DERIVATION

I. DE LA TANGENTE A LA DERIVABILITE

a) Tangente et nombre dérivé

Aux origines la dérivation, était un problème purement géométrique : il s'agissait de connaître le coefficient directeur ou pente d'une droite particulière à une courbe qu'on appelle la **tangente**.
La pente de la tangente à la courbe en A peut être vue comme étant la limite lorsque x_b tend vers x_a du quotient $\dfrac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$

Cette pente est aussi appelée nombre dérivé de la fonction **f** en x_a. Il est noté $f'(x_a)$.
Quand il existe, on dit que la fonction ***f*** est dérivable en x_a.

Définition :

- Dire que la fonction f est **dérivable** en x_0 signifie que la limite lorsque x tend vers x_0 du quotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **existe** et qu'elle est ***finie***.
- Lorsque c'est le cas, elle porte l'appellation de **nombre dérivé** de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Autrement écrit : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

La dérivation par la pratique

Déterminons le nombre dérivé en $x = 1$ de la fonction f définie par :
$f(x) = 2x^2 + 1$
Pour trouver ce nombre, nous allons suivre la définition d'un nombre dérivé : nous allons étudier la limite lorsque x tend vers 1 du quotient $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2.x^2 + 1 - 3}{x - 1}$$
$$= \frac{2.x^2 - 2}{x - 1}$$
$$= 2.\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.\frac{(x - 1).(x + 1)}{x - 1} = 2.(x + 1)$$

Donc lorsque x tend vers 1, le quotient $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ tend vers $2 \times (1 + 1) = 4$.

Conclusion : La fonction $\boldsymbol{f}(x) = 2x^2 + 1$ est dérivable en $x = 1$. Le nombre dérivé de cette fonction en 1 vaut 4 : $f'(1) = 4$.

b) Fonction dérivée.

Imaginons qu'une fonction *f* soit dérivable sur tout un ensemble I.
Cela signifie que tout réel *x* de cet ensemble I, il existe un nombre dérivé *f* '(*x*).
C'est ainsi que l'on construit la fonction dérivée de la fonction *f*.

Définition :
f est une fonction dérivable sur un ensemble I (autrement écrit, *f* est dérivable en tout réel *x* de cet ensemble).
La fonction dérivée de la fonction *f* est la fonction notée *f* ' et définie pour tout réel *x* de I par :
f ' : *x* ⟶ Nombre dérivé de *f* en *x*

II. Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
k	0	$]-\infty\,;+\infty[$
x	1	$]-\infty\,;+\infty[$
x^2	$2.x$	$]-\infty\,;+\infty[$
x^3	$3.x^2$	$]-\infty\,;+\infty[$
x^n	$n\,.\,x^{n-1}$	$]-\infty\,;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2.\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

III. Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée	Exemple
λu	$\lambda u'$	1
$u + v$	$u' + v'$	2
uv	$u'v + uv'$	3
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	4
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	5
$v(u(x))$	$u'(x)\,.\,v'(u(x))$	6

Exemples :

1. $f(x) = 7.x^5$.
   La dérivée de la fonction x^5 est égale à $5.x^4$. D'où :
   $f'(x) = 7\,.\,(x^5)' = 7\,.\,(5.x^4) = 35.x^4$

2. $f(x) = 7.x^3 - 3.x^2 + 3$.
   Les dérivées des fonctions x^3, x^2 et 3 sont respectivement $3.x^2$, $2.x$ et 0.
   $f\,'(x) = (7.x^3)' - (3.x^2)' + (3)'$
   $= 7\,.\,(x^3)' - 3\,.\,(x^2)' + (3)'$
   $= 7\,.\,(3.x^2) - 3\,.\,(2.x) + 0$
   $= 21.x^2 - 6.x$

3. **f**(x) = $(x^3 - x + 1) . (x^2 - 1)$.
   Pour calculer la dérivée de cette fonction **f**, on a le choix entre un développement ou appliquer la formule.
   La fonction **f** est le produit des fonctions :
   u(x) = x^3 - x +1 dont la dérivée est **$3.x^2$ - 1**.
   v(x) = x^2 - 1 dont la dérivée est **2.x**.
   f '(x) = **u(x)** . **v'(x)** + **u'(x)** . **v(x)**
   $= (x^3 - x + 1) . (2.x) + (x^2 - 1) . (3.x^2 - 1)$
   $= 2.x^4 - 2.x^2 + 2.x + 3.x^4 - x^2 - 3.x^2 + 1$
   $= 5.x^4 - 6.x^2 + 2.x + 1$

4. **f**(x) = $\dfrac{1}{x^2 + 1}$.
   Cette fonction est l'inverse de la fonction **u(x) = x^2 + 1** dont la dérivée est **2.x**.
   $$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = -\frac{2.x}{[x^2+1]^2} = -\frac{2.x}{x^4 + 2.x^2 + 1}$$

5. **f**(x) = $\dfrac{2.x + 1}{x^2 + 1}$.
   La fonction **f** est le produit des fonctions :
   u(x) = 2.x +1 dont la dérivée est **2**.
   v(x) = x^2 + 1 dont la dérivée est **2.x**.
   $$f'(x) = \frac{u'(x) . v(x) - u(x) . v'(x)}{[v(x)]^2}$$
   $$= \frac{(2).(x^2+1) - (2.x+1).(2.x)}{[x^2+1]^2}$$
   $$= \frac{2.x^2 + 2 - 4.x^2 - 2.x}{x^4 + 2.x + 1} = \frac{-2.x^2 - 2.x + 2}{x^4 + 2.x + 1}$$

6. **f**(x)= $\sin(3.x^2 + 1)$.
   Elle est la composée de deux fonctions dérivables sur **R** que sont :
   u(x) = $3.x^2$ +1 dont la dérivée est **6.x**.
   v(t) = sin(t) dont la dérivée est **cos(t)**.
   Comme **f**(x) = **v(u(x))**, on peut donc écrire que :
   f '(x) = **u'(x)** . **v'(u(x))**
   = **(6. x)** . **sin($3.x^2$ + 1)**
   $= 6.x . \sin(3.x^2 + 1)$

De cette propriété, on en déduit les dérivées suivantes :

u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

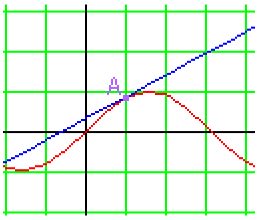
Exemples : …

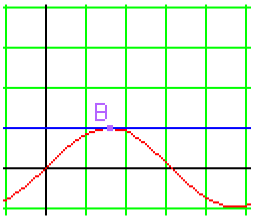
IV. Dérivée et variation

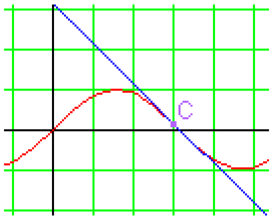
Le grand intérêt de la dérivée est que son signe permet de connaître le sens de variation de la fonction initiale. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème :
La fonction ***f*** est dérivable sur l'intervalle **I**
Si sa dérivée ***f '*** est strictement positive sur **I** alors ***f*** est strictement croissante sur **I**
Si sa dérivée ***f '*** est nulle sur **I** alors ***f*** est constante sur **I**
Si sa dérivée ***f '*** est strictement négative sur **I** alors ***f*** est strictement décroissante sur **I**

Exemple : voyons ce qu'il en est avec la fonction sinus.







En $x = 1$, la fonction sinus est croissante.
La pente de la tangente est positive.

En $x = \pi/2$, la fonction n'est ni croissante, ni décroissante.
La pente de la tangente est nulle.

En $x = 3$, la fonction sinus est décroissante.
La pente de la tangente est négative.

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 16}{x - 1}$

La fonction ***f*** est une fonction rationnelle. Elle est définie là où son dénominateur $x - 1$ est non nul.
C'est-à-dire partout sauf en 1
$D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
Enfin, on montre qu'une autre écriture de $f(x)$ est :

$$f(x) = x + \frac{16}{x-1}$$

Dans le cas présent, nous devons nous intéresser aux limites de ***f*** en l'infini et au voisinage de 1.

Limites aux infinis

Les limites de ***f*** aux infinis sont :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Comme pour tout réel x différent de 1, $f(x) = x + \dfrac{16}{x-1}$ alors la droite **D** d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de ***f*** au voisinage de l'infini

Limites en 1

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

La droite verticale **D'** d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à la courbe de la fonction ***f***

Pour tout réel x différent de x, on a donc que :

$$\mathbf{f'}(x) = \frac{(2.x-1).(x-1)-(x^2-x+16).(1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2.x^2-2.x-x+1-x^2+x-16}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2.x-15}{(x-1)^2}$$

Sous cette forme, la dérivée f' est inexploitable car ce qui nous intéresse est son signe.
Nous devons donc factoriser le numérateur $x^2 - 2x - 15$
Cela se fait tout seul en utilisant les formules du trinôme.
On obtient : $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$
Au final, pour tout réel x différent de 1 :

$$\mathbf{f'}(x) = \frac{(x+3).(x-5)}{(x-1)^2}$$

Nous voulons connaître le signe de $\boldsymbol{f'}(x)$. Nous allons donc dresser son tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	-7	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	9	↗	$+\infty$

Théorème :
f est une fonction dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;\,b\,[$. x_0 est un réel de cet intervalle.
Si ***f*** admet un maximum ou un minimum local en x_0 alors $\boldsymbol{f'}(x_0) = 0$

V. EQUATION DE LA TANGENTE

Pour conclure, nous allons revenir et répondre au problème qui nous a conduit à la notion de dérivée : celui de la tangente.

Théorème : Si la fonction **f** est dérivable en x_0 ***alors*** la courbe de la fonction **f** admet au point $M(x_0\,;\,\mathbf{f}(x_0))$ une **tangente** dont l'équation réduite est :
$y = \mathbf{f'}(x_0)\,.\,(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0)$

exemple :
Cette fonction **f** est définie par : $\mathbf{f}(x) = 2.x^2 + 1$
Déterminons l'équation de la **tangente Δ** à sa courbe en $\mathbf{x_0} = 1$.
Nous savons déjà que :
$\mathbf{f(1)} = 3$ $\quad$ $\mathbf{f'(1)} = 4$.
L'équation réduite de la droite Δ est donc :

$y = \mathbf{f'(x_0)}\,.\,(x - \mathbf{x_0}) + \mathbf{f(x_0)}$
$\;\; = \mathbf{4}\,.\,(x - \mathbf{1}) + \mathbf{3}$
$\;\; = 4.x - 1.$