Classe : TES1 Pour le 13/10/2003

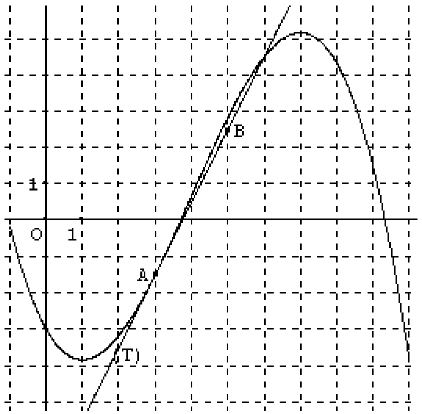
Devoir maison N°1

Exercice 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+11}{2x+3}$.

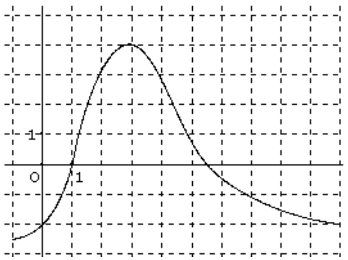
$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 1cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} f(x)$. Donner une interprétation graphique.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, $f(x) = x+1+\dfrac{8}{2x+3}$.
   Etudier alors la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
4. Etudier les variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.

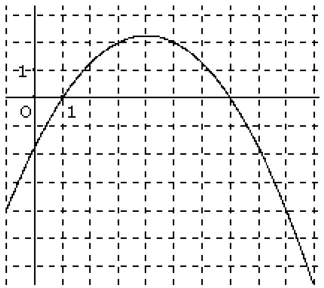
Exercice 2: Voici la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1;10]$.



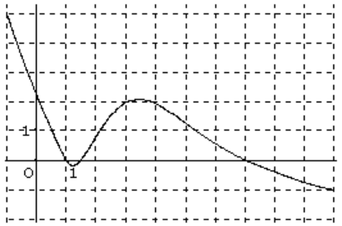
1. (a) La droite (T) qui passe par les points $A(3;-1,5)$ et $B(5;2,5)$ est tangente à la courbe représentative de f au point A. Déterminer une équation de (T).
   (b) Déterminer, en justifiant, les valeurs de $f'(1)$ et $f'(3)$.
   (c) Déterminer graphiquement le tableau de variations de f.
2. Parmi les courbes suivantes, une seule est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de f. En justifiant, déterminer cette courbe.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Correction du devoir maison N° 1

Exercice 1: f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+11}{2x+3}$.

1. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} 2x^2+5x+11 = 2\times\dfrac{9}{4} - 5\times\dfrac{3}{2}+11 = 8$

   et $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^-$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$

   La droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$,

   $$x+1+\frac{8}{2x+3} = \frac{2x^2+3x+2x+3+8}{2x+3} = \frac{2x^2+5x+11}{2x+3} = f(x).$$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{2x+3} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8}{2x+3} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. (a) $f(x)-(x+1) = \dfrac{8}{2x+3}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{2x+3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8}{2x+3} = 0$ donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) On étudie le signe de $\dfrac{8}{2x+3}$

   Pour $x > -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{8}{2x+3} > 0$ et pour $x < -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{8}{2x+3} < 0$

   donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ et en-dessous de $\mathcal{D}$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$.

4. $f(x) = u(x) + 8\times\dfrac{1}{v(x)}$ où $u(x) = x+1$; $u'(x) = 1$

   $v(x) = 2x+3$; $v'(x) = 2$

   $f' = u' + 8\times\dfrac{-v'}{v^2}$

   $$f'(x) = 1 - 8\times\frac{2}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)^2-16}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+12x-7}{(2x+3)^2}$$

   or pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, $(2x+3)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $4x^2+12x-7$

Etude du signe du trinôme :

$\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times (-7) = 144 + 112 = 256$ et $\sqrt{\Delta} = 16$

les racines du trinôme sont : $x_1 = \dfrac{-12-16}{2 \times 4} = -\dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-12+16}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$

donc $4x^2 + 12x - 7 > 0$ sur $]-\infty; -\frac{7}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

et $4x^2 + 12x - 7 < 0$ sur $]-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}[$

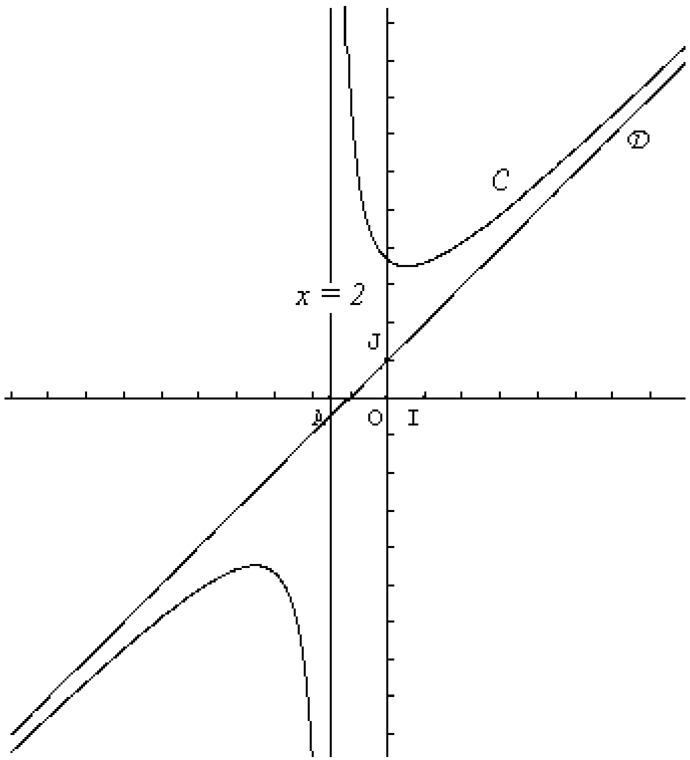
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-\frac{7}{2}) = -\frac{7}{2} + 1 + \dfrac{8}{2 \times (-\frac{7}{2}) + 3} = -\frac{5}{2} + \frac{8}{-4} = -\frac{9}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 + \dfrac{8}{2 \times \frac{1}{2} + 3} = \frac{3}{2} + \frac{8}{4} = \frac{7}{2}$

5.



Exercice 2:

1. (a) coefficient directeur de (T) : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2,5-(-1,5)}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$

   Une équation de (T) est de la forme $y = 2x + b$

   de plus (T) passe par $A(3; -1,5)$ d'où $-1,5 = 2 \times 3 + b$ et $b = -7,5$

   Donc une équation de (T) est $y = 2x - 7,5$.

   (b) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, c'est à dire $f'(1) = 0$.

   $f'(3)$ est le coefficient directeur de (T), d'où $f'(3) = 2$.

   (c) Tableau de variation de f :

x	-1		1		7		10
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. On sait que $f'(3) = 2$, mais pour la courbe 1, l'image de 3 est 4, donc on rejette la courbe 1.

   f est décroissante sur $]-1; 1[$, d'où $f'(x) < 0$ sur $]-1; 1[$, et ceci n'est pas le cas pour la courbe 3, donc on rejette la courbe 3.

   <u>Conclusion :</u> la courbe représentant la fonction f' est la courbe 2.