Classe : TES1 Le 17/10/2003

MATHEMATIQUES

Devoir N°1

Calculatrice autorisée Durée : 2h

Exercice 1: (3,5 *points*)

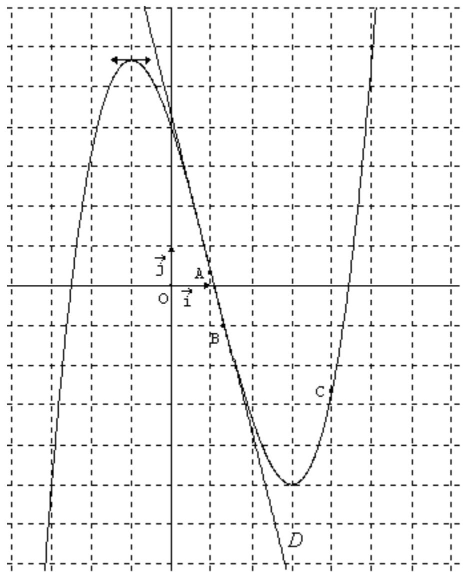
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

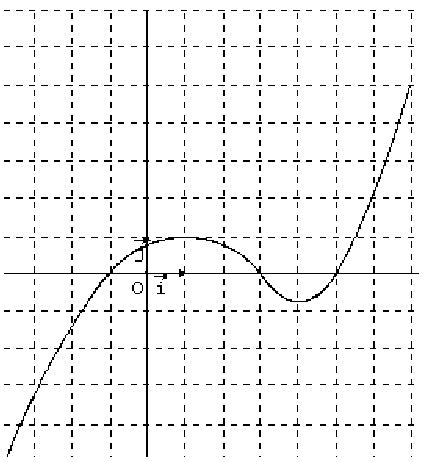
1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   Donner une interprétation graphique des résultats.
2. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $f(x) = a + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}$.
   (b) On note D la droite d'équation $y = 2$.
   Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D.

Exercice 2: (6,5 *points*)

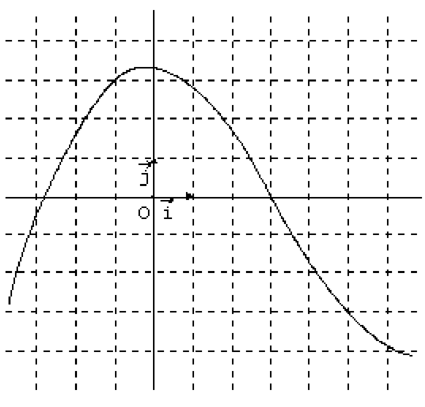
Soit g la fonction définie sur $[-4; 6]$, dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La droite D est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A de coordonnées $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$.



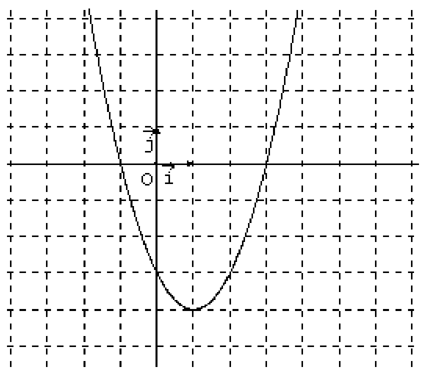
1. Donner les valeurs de $g(3)$ et $g(0)$.
2. (a) Déterminer l'équation de la droite D qui passe par les points $A\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$ et $B\left(\dfrac{4}{3}; -1\right)$.
   (b) Donner, en justifiant, les valeurs de $g'(1)$ et $g'(-1)$.
3. (a) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite Δ d'équation $y = -\dfrac{13}{6}x + 6$.
   (b) Montrer que le point $C\left(4; -\dfrac{8}{3}\right)$, qui est un point de la courbe, est un point de Δ.
   (c) Déterminer alors graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \leq -\dfrac{13}{6}x + 6$.
4. En justifiant, déterminer parmi les trois courbes suivantes laquelle est celle qui représente la fonction g' dérivée de la fonction g.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Exercice 3: (10 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$.
   Donner une interpration graphique du résultat.
2. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f. On donnera le tableau de variations de f.
4. (a) On note $P(x) = 2x^2 - 5x + 1$.
   Déterminer, si elles existent, les racines du trinôme $P(x)$.
   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
5. Donner une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.
6. Tracer $\mathcal{C}$, T et les asymptotes à la courbe.

Exercice 1: f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$.

1. $f(x) = \dfrac{x^2\left(2-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$
   alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
   et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
   donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) $f(x) = a+\dfrac{bx+c}{x^2+1} = \dfrac{ax^2+a+bx+c}{x^2+1} = \dfrac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}$
   d'où $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ a+c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=-1 \end{cases}$
   donc $f(x) = 2+\dfrac{-3x-1}{x^2+1} = 2-\dfrac{3x+1}{x^2+1}$.
   (b) D est la droite d'équation $y=2$.
   $f(x)-2 = \dfrac{-3x-1}{x^2+1}$ or $x^2+1>0$ sur $\mathbb{R}$ et $-3x-1>0 \iff x<-\dfrac{1}{3}$
   donc la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de D sur $]-\infty;-\dfrac{1}{3}[$ et $\mathcal{C}$ est en-dessous de D sur $]-\dfrac{1}{3};+\infty[$.

Exercice 2: g est une fonction définie sur $[-4;6]$.

1. $g(3)=-5$ $g(0)=4$.
2. (a) le coefficient directeur de (AB) est $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{-1-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-1} = \dfrac{-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{4}{3}\times 3 = -4$.
   une équation de Δ est de la forme $y=-4x+b$,
   de plus Δ passe par A, d'où $\dfrac{1}{3} = -4\times 1+b$ donc $b=\dfrac{13}{3}$. Une équation de Δ est donc $y=-4x+\dfrac{13}{3}$.
   (b) $g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire Δ, donc $g'(1)=-4$.
   $g'(-1)=0$ car la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est horizontale.
3. (a) La droite D passe par le point $(0;6)$
   pour $x=6$, $y=-7$, donc D passe par le point $(6;-7)$.
   (b) pour $x=4$, $y=-\dfrac{13}{6}\times 4+6 = -\dfrac{26}{3}+6 = -\dfrac{26}{3}+\dfrac{18}{3} = -\dfrac{8}{3}$.
   Donc D passe par le point $C(4;-\dfrac{8}{3})$ qui est un point de la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)\leq -\dfrac{13}{6}x+6$ est $[-4;4]$.
4. On sait que $g'(-1)=0$, or l'image de -1 sur la courbe 2 est 3, donc on rejette la courbe 2.
   g est croissante sur $[-4;-1]$, d'où $g'(x)\geq 0$ sur $[-4;-1]$, mais pour $x\in[-4;-1]$, sur la courbe $\mathcal{C}_1$, l'image de x est négative, donc on rejette la courbe 1.
   En conclusion, c'est la courbe 3 qui représente f'.

Exercice 3: f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+1}{x-1}$.

1. $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2-5x+1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$
   et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x-1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$
   Donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

2. $f(x)-(2x-3)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-1}-\dfrac{(2x-3)(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x^2-5x+1-(2x^2-3x-2x+3)}{x-1}=\dfrac{-2}{x-1}$

   or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x-1}=0$

   donc la droite d'équation $y=2x-3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

   $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=2x^2-5x+1$; $u'(x)=4x-5$

   $v(x)=x-1$; $v'(x)=1$

   $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

   $f'(x)=\dfrac{(4x-5)(x-1)-1\times(2x^2-5x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2-5x-4x+5-2x^2+5x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x+4}{(x-1)^2}$

   or $(x-1)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2-4x+4$

   $\Delta=(-4)^2-4\times2\times4=16-32=-16<0$

   donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2x^2-4x+4>0$ et $f'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

   Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) On note $P(x)=2x^2-5x+1$

   $\Delta=(-5)^2-4\times2\times1=25-8=17$

   Le trinôme a deux racines : $x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{17}}{2\times2}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{17}}{2\times2}=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

   (b) On résout $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

   $f(x)=0\Longleftrightarrow\dfrac{2x^2-5x+1}{x-1}=0\Longleftrightarrow2x^2-5x+1=0$ donc $x=x_1$ ou $x=x_2$

   donc les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont : $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$.

5. Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 est : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

   où $f'(2)=\dfrac{2\times2^2-4\times2+4}{(2-1)^2}=4$ et $f(2)=\dfrac{2\times2^2-5\times2+1}{2-1}=-1$

   une équation de T est alors : $y=4(x-2)-1$ c'est à dire $y=4x-9$.

6.