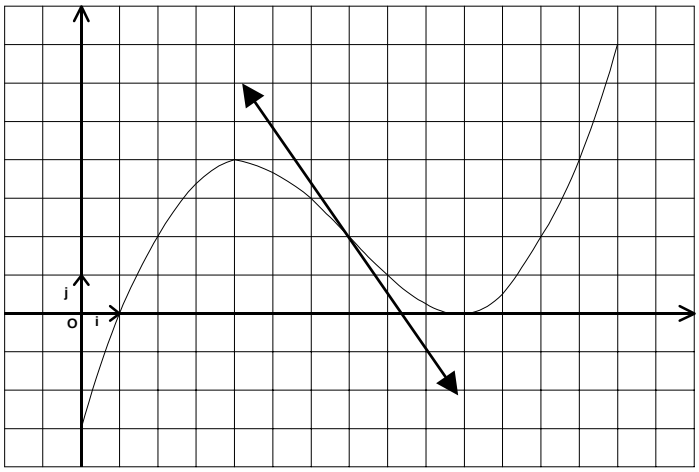
DEVOIR SURVEILLE n°3

• Exercice n°1 : (bac septembre 1996)

On considère une fonction définie et dérivable sur I = [0 ; 14].
Sa représentation graphique est la courbe C ci-dessous.
Elle passe par le point A (7 ; 2), et la tangente en A à C est la droite Δ qui passe par le point B(9 ; –1).



1. Par lecture graphique :
   a. Dresser le tableau de variations de *f*, indiquer le signe de *f '* (*x*) sur I,
   b. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ sur I,
   c. Donner l'ensemble des réels tels que $0 < f(x) < 2$.
2. Que valent *f*(7) et *f '*(7) ? Ecrire une équation de Δ.
3. Dresser le tableau de variations de $\frac{1}{f}$ sur] 1 ; 10 [.

• Exercice n°2 : (bac 2002 modifié)

On considère la fonction *f* définie sur] 0 ; +∞ [par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$$

On sait que la courbe coupe l'axe des abscisses aux points A(1 ; 0) et B (3 ; 0) et que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe en + ∞.

1. En utilisant l'énoncé ci-dessus, répondre aux questions suivantes :
   a. Déterminer la limite de *f*(*x*) quand *x* tend vers + ∞. En déduire la valeur de *a*,
   b. Déterminer les réels *b* et *c*,
   c. Déterminer la limite de *f*(*x*) en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. On considère que $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$
   a. Calculer *f '*(*x*), puis étudier son signe et établir le tableau de variations de *f*.
   b. Tracer la courbe dans un repère orthonomal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

Correction du DS n°2

• Exercice n°1 :

1. a.

x	0		4		10		14
$f(x)$	-3	↗	4	↘	0	↗	7

f ' est positive sur [0 ; 4] ∪ [10 ; 14] et négative sur [4 ; 10]

b. Il y a une seule solution

c. S = [1 ; 2] ∪ [7 ; 12]

2. $\boxed{f(7) = 2}$ et $\boxed{f'(7) = -\frac{3}{2}}$

Δ est de la forme $y = ax + b$ avec $a = f'(7) = -\frac{3}{2}$ et elle passe par A(7 ; 2)

Donc : $y = -\frac{3}{2}x + b$, puis $2 = -\frac{3}{2} \times 7 + b$, ce qui donne $b = \frac{25}{2}$

donc : Δ : $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}}$

3.

x	1		4		10
$1/f(x)$	+∞	↘	1/4	↗	+ ∞

• Exercice n°2 :

1. a. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$$f(x) = \frac{x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)}{x^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{c}{x^2}\right) = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = a$. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a}$

$y = -1$ étant asymptote à la courbe en + ∞, on en déduit que $\boxed{a = -1}$

b.A appartient à la courbe donc : $f(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-1+b+c}{1^2}=0 \Leftrightarrow b+c=1$

B appartient à la courbe donc : $f(3)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-9+3b+c}{3^2}=0 \Leftrightarrow 3b+c=9.$

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} b+c=1 \\ 3b+c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-c \\ 3-3c+c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=4 \\ c=-3 \end{cases}}$$

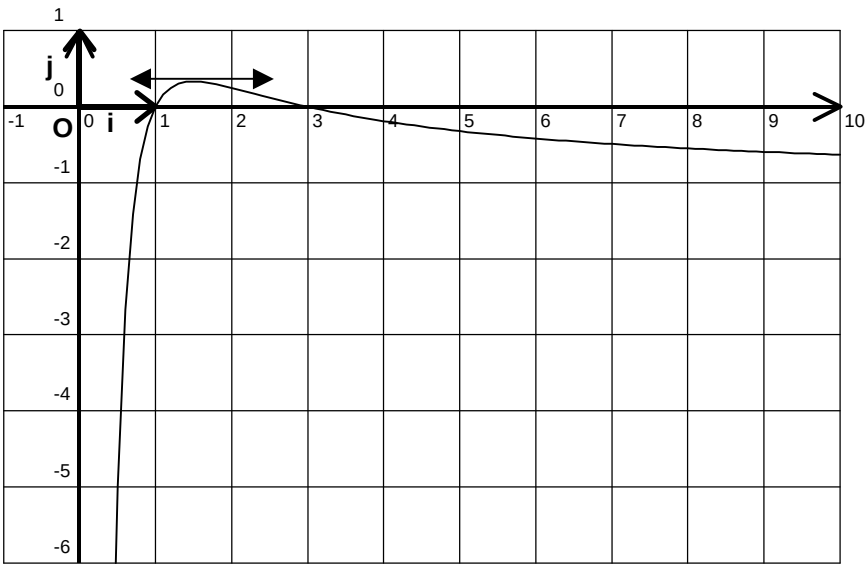
c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ax^2+bx+c\right)=c=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty}$

La courbe admet une *asymptote verticale d'équation* $x=0$

2. a. f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [, on utilise la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x)=\frac{(-2x+4)(x^2)-(-x^2+4x-3)(2x)}{x^4}=\frac{-2x^3+4x^2+2x^3-8x^2+6x}{x^4}=\frac{-4x^2+6x}{x^4}=\boxed{\frac{-4x+6}{x^3}}$$

x	0		3/2		+ ∞
$-4x+6$		+	0	–	
x^2		+		+	
$f'(x)$		+	0	–	

x	0		3/2		+∞
$f(x)$	- ∞	↗	1/3	↘	-1

b.