

Exercices sur les probabilités

Exercice 1 : On lance un dé régulier à six faces.

Calculer la probabilité que le résultat soit :

- pair et strictement supérieur à 4 ;
- pair sachant qu'il est strictement supérieur à 4 ;
- strictement supérieur à 4 sachant qu'il est pair.

Exercice 2 : Une urne contient cinq jetons blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et deux jetons noirs numérotés 1, 2.

On tire un jeton au hasard.

Calculer la probabilité :

- qu'il soit noir et pair ;
- qu'il soit noir sachant qu'il est pair ;
- qu'il est pair sachant qu'il est noir.

Exercice 3 : Deux évènements A et B vérifient :

$$P(A) = 0,4 \quad ; \quad P(B) = 0,5 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,7.$$

Sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?

exercice 4 : Deux évènements A et B indépendants vérifient :

$$P(A) = 0,2 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,4.$$

Calculer : $P(A \cup B)$, $P(A \cup \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup B)$ et $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Exercice 5 : On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes bien battu.

- Les deux évènements « la carte tirée est un cœur » et « la carte tirée est un roi » sont-ils indépendants ?
- Même question pour « la carte tirée est un cœur » et la carte tirée n'est pas un roi ».

Exercice 6 : Dans une classe, il y a douze garçons dont quatre font de l'espagnol et dix-huit filles dont n font de l'espagnol.

On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Les deux évènements « L'élève est un garçon », « L'élève fait de l'espagnol » sont-ils indépendants ?

Exercice 7 : Dans une classe, on a relevé les renseignements suivants :

	Porte des lunettes	ne porte pas de lunettes
Garçons	6	4
Filles	6	14

On choisit au hasard un élève dans la classe.

On note G l'évènement « L'élève est un garçon » et L l'évènement « L'élève porte des lunettes ».

- Calculer $P(G)$ et $P(L)$.
- Calculer $P(G \cap L)$, $P_L(G)$, $P_G(L)$. On énoncera chaque résultat par une phrase.
- Les deux évènements G et L sont-ils indépendants ? Pourquoi ?
- Donner deux représentations différentes de cette épreuve par un arbre pondéré.

Exercice 8 : Une urne U_1 contient trois boules vertes et une rouge, une urne U_2 deux boules vertes et deux rouges. On lance un dé régulier à six faces et si on obtient 6, on tire une boule dans U_1 , sinon dans U_2 .

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Exercice 9 : Dans une urne U_1 , il y a quatre boules noires et six boules blanches.

Dans une urne U_2 , il y a trois boules noires et sept boules blanches.

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard une boule dans cette urne. On note A l'évènement « On choisit U_1 », N l'évènement « La boule tirée est noire ».

- Représenter l'épreuve par un arbre.
- Calculer $P_A(N)$ et $P_{\overline{A}}(N)$.
- Calculer : $P(N \cap A)$, $P(N \cap \overline{A})$ et $P(N)$.
- Calculer $P_N(A)$.

Exercice 10 : (Liban, juin 2002)

Dans une entreprise, les salariés sont classés en deux catégories : cadres et employés. Une entreprise emploie 30 cadres et 240 employés. Au cours de négociations sur la réduction du temps de travail, dite RTT, on propose aux salariés trois formules :

- Formule N°1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail,
- Formule N°2 : une RTT d'un vendredi après-midi sur deux,

- Formule N°3 : une RTT de 12 jours de travail par an.

Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplissant une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. On a obtenu les résultats suivants :

- Aucun cadre n'a choisi la formule N°1,

- Parmi les employés :

36 ont choisi la formule N°1,

99 ont choisi la formule N°2,

- 40% des salariés ont choisi la formule N°2.

On extrait, au hasard, la fiche d'un salarié. On notera :

C l'événement « le salarié est un cadre »,

E l'événement « le salarié est un employé »,

R1 l'événement « le salarié a choisi la formule N°1 »,

R2 l'événement « le salarié a choisi la formule N°2 »,

R3 l'événement « le salarié a choisi la formule N°3 ».

$p(A)$ désigne la probabilité d'un événement A et $p_B(A)$ celle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer les probabilités $p(C)$ et $p(E)$.

2. Parmi les probabilités $p(R1 \cap C)$, $p(R1 \cap E)$, $p(R2 \cap E)$, $p_E(R1)$, $p_E(R2)$, $p(R2)$ indiquer celles qui correspondent aux quatre résultats du sondage et donner leur valeur numérique.

3. a. Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre ayant choisi la formule N°2.

b. Démontrer que la probabilité que le salarié ait choisi la formule N°2, sachant qu'il s'agit d'un cadre, est $\frac{3}{10}$.

4. Calculer la probabilité $p(R1)$, puis la probabilité $p(R3)$.

Exercice 11 : (Amérique du sud, novembre 2001)

Des calculs statistiques effectués sur les élèves de terminale d'un lycée, concernant l'année scolaire 1999-2000, ont donné les renseignements suivants :

En juin 2000, les élèves de terminale se répartissaient ainsi :

45% en S, 25% en L, et 30% en ES.

Les taux, arrondis, de réussite au baccalauréat ont été les suivants :

S	L	ES
87%	85%	79%

A la fin du mois de décembre 2000, sur l'ensemble des élèves qui étaient en terminale dans ce lycée en juin de la même année, on en choisit un au hasard.

Dans la suite de l'exercice, on appelle :

- S l'événement : « L'élève choisi était en S l'année scolaire précédente » ;

- L l'événement : « L'élève choisi était en L l'année scolaire précédente » ;

- E l'événement : « L'élève choisi était en ES l'année scolaire précédente » ;

- R l'événement : « L'élève choisi a été reçu au baccalauréat ».

1. a) Donner $p(E)$, $p_E(R)$ et montrer que $p(R \cap E) = 0,237$.

b) Calculer $p(R \cap S)$ et $p(R \cap L)$.

c) En déduire que la probabilité que cet élève choisi au hasard ait été reçu au baccalauréat est 0,841.

2. Lorsque les élèves, reçus au baccalauréat, sont venus au lycée chercher leur diplôme, on s'est renseigné sur leur poursuite d'études, et on a obtenu les résultats suivants :

Elèves issus de	S	L	ES
Poursuite d'études en faculté	40%	60%	40%

On appelle :

- F l'événement : « L'élève choisi est en faculté » ;

- E' l'événement $R \cap E$;

- L' l'événement $R \cap L$;

- S' l'événement $R \cap S$;

a) Donner $p_{E'}(F)$.

b) Calculer $p(F \cap E')$.

c) Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit en faculté est 0,3789.

3. A la même date, on choisit, toujours au hasard, un élève qui se trouvait en terminale de ce lycée l'année scolaire précédente et qui se trouve maintenant en faculté.

a) Pourquoi les événements $F \cap E'$ et $F \cap E$ sont-ils les mêmes ?

b) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit issu de terminale ES. (En donner une valeur approchée par excès à 10^{-4} près.)

Exercice 12 : Une urne de Bernoulli contient deux boules blanches et une boule noire.

1. On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

2. On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

3. On tire deux boules simultanément et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 13 : Dans une foire, on propose le jeu suivant.

Le joueur mise 1€ sur l'un des numéros 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Puis on lance deux dés réguliers à six faces :

- si le numéro sort deux fois, le joueur remporte deux fois sa mise ;

- s'il sort une fois, le joueur récupère sa mise ;

- s'il ne sort pas, le joueur perd sa mise.

Quelle est l'espérance de gain net ?

Exercice 14 : On lance deux dés réguliers et on relève la somme X des points marqués.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On vous propose le jeu suivant. Vous misez 10€, puis vous lancez les dés. Si $X > 9$, vous gagnez 50€.

Le jeu est-il équitable ? Sinon, vous est-il favorable ou défavorable ?

Exercice 15 : Un questionnaire à choix multiples consiste à répondre successivement à quatre questions indépendantes.

Pour chaque question trois réponses sont proposées, dont une seule est correcte.

Un candidat répond au hasard à chaque question.

1. On appelle X le nombre de bonnes réponses.

Etudier X (loi de probabilité, espérance, écart-type).

2. On appelle Z le score du candidat, sachant que chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise réponse enlève un point.

Etudier Z.

Exercice 16 : A la loterie, 10 000 billets ont été vendus. Le tirage au sort désignera un gagnant d'un gros lot de 5000€, dix gagnants d'une somme de 500€ et vingt gagnants d'une somme de 100€.

1. Modéliser l'épreuve du tirage de la loterie à l'aide d'une urne de Bernoulli.

2. On appelle X le gain brut d'un joueur pour un billet choisi au hasard.

Donner la loi de probabilité de X.

3. Quel est le gain brut moyen que peut espérer le joueur avec un billet ?

4. Quel est le prix minimal de chaque billet pour que la loterie soit rentable pour les organisateurs ?

5. Le prix d'un billet est 2€. Quel est le gain net moyen que peut espérer un joueur avec un billet ?

Exercice 17 : Dans un jeu, on pose à un candidat une question choisie au hasard entre deux catégories équiprobables : sport et musique. Martin se présente à ce jeu. il sait qu'il a :

- trois chances sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en sport ;

- une chance sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en musique.

1. Démontrer que la probabilité qu'il donne la bonne réponse est $\frac{1}{2}$.

2. La mise pour participer au jeu est 10€. On gagne 20€ si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de sport, 10€ si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de musique ; on ne gagne rien si la réponse est fausse.

On note X le gain net de Martin.

a) Donner sa loi de probabilité.

b) Calculer son espérance μ et l'interpréter.

c) Calculer son écart-type σ .

d) Calculer la probabilité que X soit compris entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.

Exercice 18 : (France métropolitaine, juin 2002)

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions, afin de connaître leur insertion professionnelle.

A la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :

- A : « La personne a une activité professionnelle » ;

- B : « La personne poursuit ses études » ;

- C : « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60% des réponses ont été envoyées par des filles.

Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :

- 65% des filles et 55% des garçons ont une activité professionnelle ;

- 20% des filles et 15% des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0,18.

b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?
3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise). A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leq S < 22$	$22 \leq S < 26$	$26 \leq S < 30$	$30 \leq S < 34$	$34 \leq S < 38$	$38 \leq S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

Exercice 19 : (Asie, juin 2002)

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défauts, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante : la probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.

En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.

Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est 0,94.

On note :

- C l'événement : « La calculatrice présente un défaut de clavier » ;
- A l'événement : « La calculatrice présente un défaut d'affichage ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.

$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.

Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$p_{\overline{C}}(\overline{A})$, $p_C(A)$ et $p(C)$.

- b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

a) Calculer la probabilité que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c) En déduire $p(A)$.

d) Montrer que la probabilité de l'événement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

3. Un client choisit au hasard trois calculatrices de cette marque.

a) Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présente aucun défaut.

b) Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.