Devoir de type bac n^o 5
Classe de terminale ES

Espérance mathématique, fonction logarithme, interprétation graphique, suites...

Copyright © 2004 – J.-M. Boucart
GNU Free Documentation Licence

On veillera à détailler et à rédiger clairement les raisonnements, à soigner son écriture et sa présentation. Il en sera tenu largement compte.

La calculette graphique est autorisée mais aucun document ni formulaire n'est autorisé.

Le sujet se compose de quatre exercices.

Énoncé

Exercice 1 - sur 7 pts

Un exercice de baccalauréat est un questionnaire à choix multiples, noté sur trois points.

Il se compose de trois questions, désignées par les lesttres A, B, C. Pour chaque question trois propositions de réponses sont faites, numérotées 1, 2, 3. Une seule parmi elles est exacte. Le candidat répond à l'ensemble des questions en remplissant le cadre suivant :

A :	B :	C :

Le cadre correctement rempli pour l'exercice l'exercice est :

A : 2	B : 2	C : 2

1. En utilisant le procédé de votre choix, lister (de façon simplifiée) tous les cadres (complets) qui peuvent être proposés.
2. Le concepteur du sujet a décidé que chaque bonne réponse rapporte un point au candidat et que les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

   Le candidat JMB ne connait rien au sujet de l'exercice et répondra à toutes les questions, complètement au hasard.

   a) Établir, sous forme d'ensemble de cadres, les événements N_1, et N_3 suivants :
   - N_1 : JMB obtiendrait exactement un point.
   - N_3 : JMB obtiendrait exactement deux points.

   b) On considère l'ensemble Ω des notes que le candidat JMB est susceptible d'obtenir à cet exercice. Établir la loi qui associe à chaque note possible, la probabilité que JMB l'obtienne.

c) Quelle est la note que JMB peut espérer obtenir (au sens de l'espérance mathématique) à cet exercice tout en ne connaissant rien au sujet ?

3. La commission de choix des sujets fait observer au concepteur qu'il est anormal qu'un candidat ne connaissant rien au sujet puisse « *espérer* » obtenir des points. Il demande donc au concepteur de revoir son barême.

   Celui-ci décide d'attribuer :

   – un point pour une bonne réponse,
   – x point(s) (négatifs) pour une mauvaise.

   a) Établir (en fonction de x) la loi qui, avec ce nouveau barême, associe à chaque nombre de bonnes réponses possibles, la probabilité qu'un candidat qui ne connait rien au sujet les obtienne.

   b) Quelle doit être la valeur de x pour que la note que le candidat JMB puisse « *espérer* » soit zéro.

   c) Établir alors l'ensemble des notes possibles, et donner la loi de probabilité du barême répondant aux souhaits de la commission.

4. Le sujet et son barême repartent alors en commission d'examen de sujets. Celle-ci fait observer que pour un exercice d'examen, il est interdit que la note finale soit négative.

   Le concepteur du sujet, décide alors de conserver son barême mais de transformer toute note négative, obtenue selon le principe du barême, en zéro.

   a) Quelle sont alors les notes possibles ?

   b) Quelle est la loi de probabilité sur cet ensemble de notes ?

   c) L'espérance mathématique de cette loi est elle nulle ?

Exercice 2 (sur 4 pts)

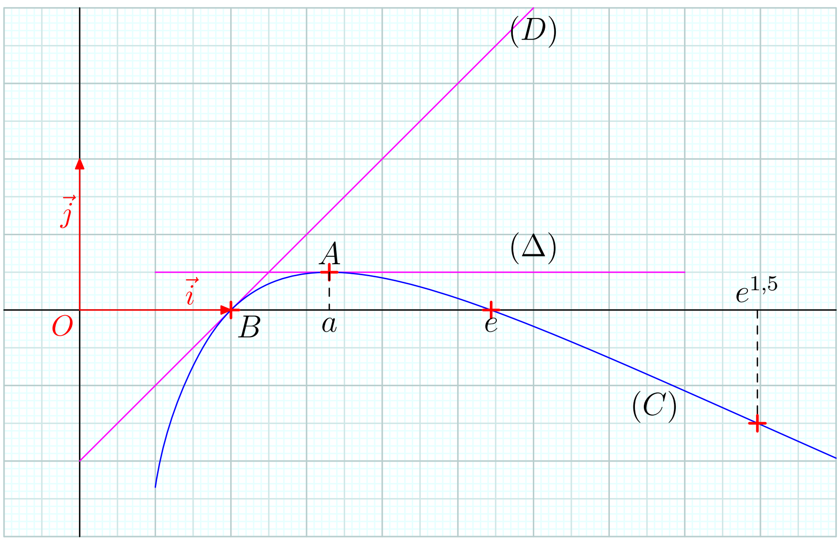


FIG. 1 – Représentation de f

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm, la courbe (C) (figure 1) représente une fonction f définie ét dérivable sur l'intervalle $I =]0\,;e^{1,5}]$.

La fonction dérivée de f est notée f'. Les variations de f sont données par le tableau ci-dessous :

x	0		a		$e^{1,5}$
f	‖	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

On précise que :

- les droites (Δ) et (D) sont tangentes à la courbe (C) respectivement aux points A d'abscisse a et B d'abscisse 1.
- la droite (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.
- l'axe des ordonnées est asymptote à (C).

Partie A

Par lecture graphique, sans justification des résultats, donner :

1. les valeurs $f(e)$, $f(a)$, $f'(1)$, $f'(a)$;
2. la limite de f en 0 ;
3. le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x ($x \in I$) ;
4. l'ensemble des solutions, sur l'intervalle I, de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

Partie B

La fonction f est définie sur $]0\,;e^{1,5}]$ par $f(x) = \ln x - (\ln x)^2$

1. Retrouver par le calcul le résultat trouvé en A.3.
2. Déterminer le nombre a, abscisse du point A de la courbe (C).

D'après le sujet d'Octobre 1998
Sportifs de haut niveau

Exercice 3 (sur 5pts) - enseignement de spécialité

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,u_n + 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. **a)** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déduire, en utilisant la question précédente, $\lim v_n$ et $\lim u_n$.

2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$.
   Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. **a)** Exprimer w_n en fonction de n.

   b) Pour quelle valeur de n a-t-on $w_n = \ln(27^3) - \ln(9)$?

Bac ES – Juin 2002
Centres étrangers

Exercice 3 (sur 5 pts) - Enseignement obligatoire

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par (C) la courbe représentative de f.

1. Étudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$
   En déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.
3. **a)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

   b) Montrer que, pour tout x de $]1\,;+\infty[$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ et en déduire la position de (C) par rapport à (D).
4. Déterminer les coordonnées du point de (C) où la tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à $-\dfrac{5}{3}$ et donner une équation de cette tangente (Δ).
5. Montrer que sur l'intervalle $[4\,;5]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.

D'après BAC ES - juin 2000
France métropolitaine

Exercice 4 (sur 4pts)

Cet exercice ne fait que mettre en œuvre des techniques de calcul. Les questions sont indépendantes et sans lien entre-elles.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par

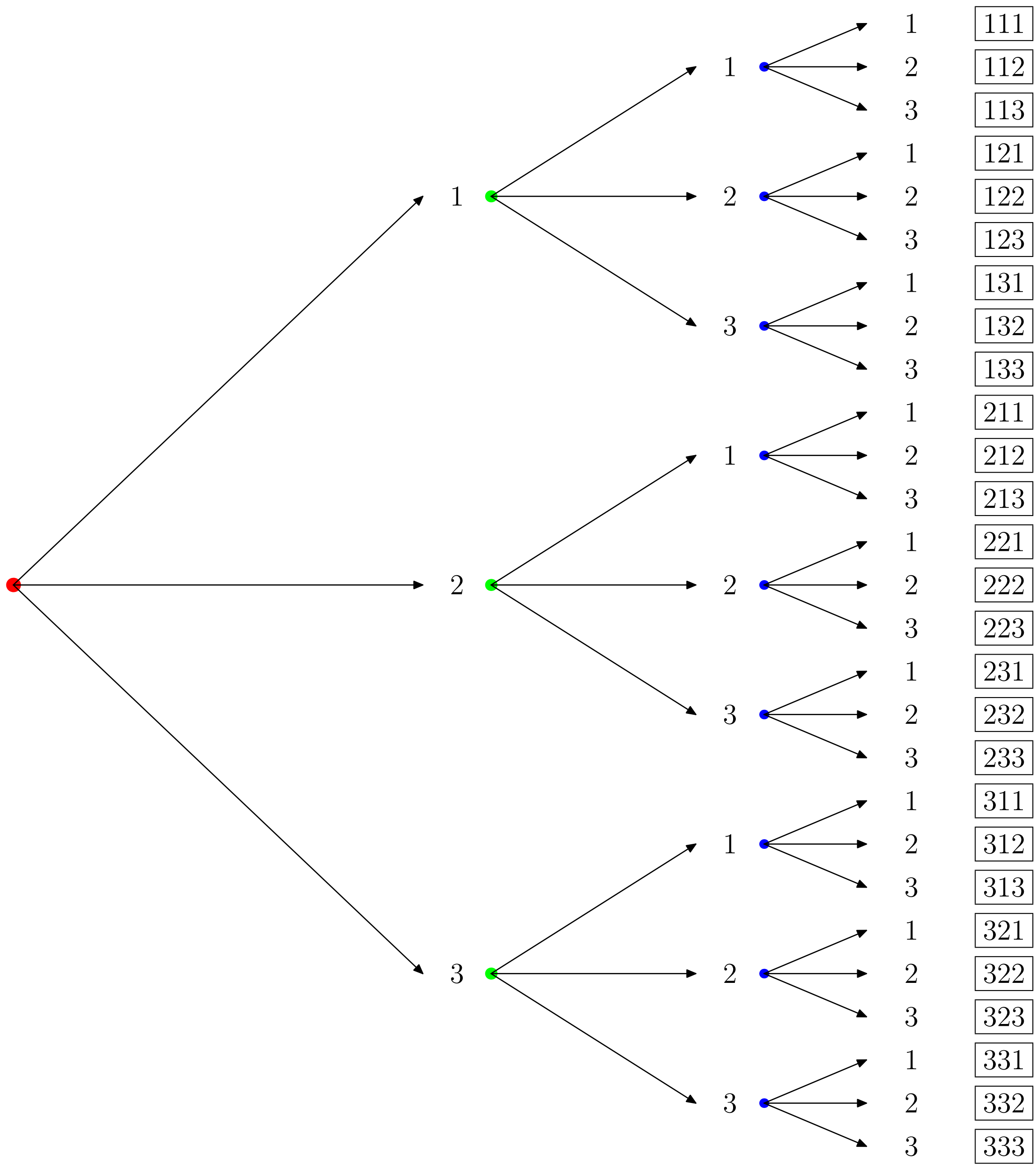
$$f : x \longmapsto \frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1)$$

Corrigé

Exercice 1

1. Liste des réponses possibles

Pour déterminer toutes les manières possibles de remplir le cadre de réponses, on peut construire un arbre de décision dans lequel chaque point marque un choix à effectuer : point rouge pour le choix de la réponse à la question A, point vert pour le choix de la réponse à question B, point bleu pour le choix de la réponse à la question C. Chaque cadre possible résulte des choix effectués.



Le dénombrement des cadres conduit à l'effectif 27.

Le calcul du nombre de cadre peut se faire sous la forme : $3^3 = 27$.

2. Premier barême

Puisque le cadre correctement rempli ne contient que des 2, JMB obtiendra exactement un point si le cadre qu'il propose contient exactement un 2. On a donc :

$$N_1 = \{112, 121, 123, 132, 211, 213, 231, 233, 312, 321, 323, 332\}$$

De même, il obtiendra exactement deux points, si le cadre qu'il propose, contient exactement deux 2. On a donc :

$$N_2 = \{122, 212, 221, 223, 232, 322\}$$

Lorsque le candidat JMB répond au hasard, on considère que les cadres de réponse sont équiprobables. En conséquence, si l'on considère la loi équirépartie sur l'ensemble Ω_C des cadres possibles, on aura :

$$P(N_1) = \frac{\text{Card}(N_1)}{\text{Card}(\Omega_C)} = \frac{12}{27} \quad \text{et} \quad P(N_2) = \frac{\text{Card}(N_2)}{\text{Card}(\Omega_C)} = \frac{6}{27}$$

Si l'on note N_3 l'événement « JMB obtiendrait exactement 3 points » et N_0 l'événement « JMB n'obtiendrait aucun point », on a :

$$P(N_3) = \frac{1}{27} \quad \text{et} \quad P(N_0) = 1 - P(N_1) - P(N_2) - P(N_3) = \frac{8}{27}$$

L'ensemble des notes possibles est $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ et, selon les résultats obtenus, la loi de probabilité sur cet ensemble est :

notes	x_i	0	1	2	3
probabilité	p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
valeur approchée	$pi \approx$	$0,3$	$0,44$	$0,22$	$0,04$

L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E_1 = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = 1$$

3. Deuxième barême

Le nombre de question est le même, et le nombre de réponses à choisir à chaque question n'a pas changé.

La loi qui, à tout nombre de bonnes réponses possibles associe la probabilité que JMB, en répondant au hasard, les obtienne, est la même que dans la question précédente, à savoir :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$pi \approx$	$0,3$	$0,44$	$0,22$	$0,04$

Par contre, le barême à changé et, sur l'ensemble des notes possibles, dans le cadre du nouveau barême, on a la loi de probabilité suivante :

x_i	$-3x$	$1-2x$	$2-x$	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$pi \approx$	$0,3$	$0,44$	$0,22$	$0,04$

L'espérance mathématique de cette loi est :

$$\begin{aligned} E_2 &= -3x \times \frac{8}{27} + (1-2x)\frac{12}{27} + (2-x)\frac{6}{27} + 3 \times \frac{1}{27} \\ &= \frac{27}{27} - \frac{54x}{27} \\ &= 1-2x \end{aligned}$$

Pour que E_2 soit nulle, il faut et il suffit que $x = -0,5$.

La loi donnant la probabilité des notes que l'on peut obtenir en répondant au hasard est donc :

x_i	$-1,5$	0	$1,5$	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$pi \approx$	$0,3$	$0,44$	$0,22$	$0,04$

4. Troisième barême

Dans le barême précédent, l'événement « JMB aurait une note inférieure ou égale à 0 » est l'ensemble $N'_{\leqslant 0} = \{-1,5\,;0\}$. Sa probabilité serait donc :

$$P(N'_{\leqslant 0}) = P(\{-1,5\}) + P(\{0\}) = \frac{8}{27} + \frac{12}{27} = \frac{20}{27}$$

Puisque le concepteur transforme les notes négatives en 0, toutes choses étant égales par ailleurs, cela entraîne que 0 bonne réponse ou une bonne réponse conduisent à obtenir la note zero. L'ensemble des notes possibles est alors $\Omega_3 = \{0\,;1,5\,;3\}$ et la loi de probabilité sur cet ensemble de notes sera :

x_i	0	$1,5$	3
p_i	$\frac{20}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$pi \approx$	$0,74$	$0,22$	$0,04$

L'espérance mathématique de cette loi n'est pas nulle, elle est :

$$E_3 = 0 \times \frac{20}{27} + 1,5 \times \frac{6}{27} + 3 \times \frac{1}{27} = \frac{10}{27} \approx 0,37$$

Exercice 2

Partie A

Comme $A \left| \begin{array}{l} a \\ \frac{1}{4} \end{array} \right. \in (C)$ et que (C) représente f, on a $f(a) = 0,25$.

Comme (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse e, on a $f(e) = 0$.

Comme Δ, tangente en A à (C), a un coefficient directeur nul, on a $f'(a) = 0$.

La droite (D) a pour coefficient directeur 1 ; comme elle est tangente à (C) au point B d'abscisse 1, on a $f'(1) = 1$.

Comme (C) admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale, et que f est croissante sur $]0\,;a[$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Comme f est croissante sur l'intervalle $]0\,;a]$ et décroissante sur $[a\,;e^{1,5}]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $]0\,;a]$

Partie B

1. Factorisons : $f(x) = \ln(x)[1 - \ln(x)]$
   Nous connaissons le signe de $\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le signe de $\ln x$ sur I :

x	0		1		$e^{1,5}$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

   Étudions le signe de $1 - \ln x$.
   Les équations et inéquations suivantes sont, sur $\mathbb{R}_+^*$, équivalentes :

$$\begin{array}{c|c|c} 1 - \ln x < 0 & 1 - \ln x = 0 & 1 - \ln x > 0 \\ 1 < \ln x & 1 = \ln x & 1 > \ln x \\ x > e & x = e & x < e \end{array}$$

   On en déduit le signe de $f(x)$ sur I :

x	0		1		e		$e^{1,5}$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$			
$1 - \ln x$	‖		$+$		0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ces résultats correpondent bien à ceux qui ont été trouvés graphiquement.

2. Soit u la fonction définie sur $I =]0\,;e^{1,5}[$ par : $u(x) = x - x^2$.
   On a : $f = u \circ \ln$ donc $f' = (u' \circ \ln) \times \ln'$ avec $u'(x) = 1 - 2x$.

   Par conséquent : $f'(x) = (1 - 2\ln x)\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$

   A est le point de (C) par lequel passe la tangente horizontale à (C). Son abscisse a est donc solution de l'équation $f'(x) = 0$.
   Équations équivalentes :

   $1 - 2\ln x = 0$
   $\frac{1}{2} = \ln x$
   $e^{\frac{1}{2}} = x$ puisque la fonction exponentielle est croissante
   $\sqrt{e} = x$

   La seule solution à ces équation est donc $a = \sqrt{e}$

Exercice 3 - spécialité

Question 1

Par définition, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}\,u_n + 2 - 3 = \dfrac{1}{3}\,u_n - 1$.

Comme $v_n = u_n - 3$, on voit que : $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,v_n$.

Cette relation entre deux termes consécutifs quelconques permet de conclure que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Comme $u_0 = 6$ et $v_n = u_n - 3$, le premier terme de la suite (v_n) est : $v_0 = 3$.

Le terme de rang $n+1$ d'une suite géométrique de premier terme p et de raison r étant pr^n, on peut exprimer v_n et u_n :

$$v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{et} \quad u_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

Les suites géométriques dont la raison est comprise entre 0 et 1, convergent vers 0, donc (v_n) converge vers 0. La suite (u_n) converge donc vers 3 (limite d'une somme de deux suites).

Question 2

Calculons $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

Comme la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante, (w_n) est une suite arithmétique. La raison est $-\ln(3)$ et le premier terme est : $w_0 = \ln(v_0) = \ln(3)$.

Question 3

Le terme de rang $n+1$ s'exprime en fonction du premier terme et de la raison :

$$w_n = \ln(3) - n\ln(3) = (1-n)\ln(3)$$

L'équation $w_n = \ln(27^3) - \ln(9)$ dans laquelle n est une variable entière, est équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(1-n)\ln(3) = 3\ln(27) - \ln(9) & \\
(1-n)\ln(3) = 3\ln(3^3) - \ln(3^2) & \\
(1-n)\ln(3) = 9\ln(3) - 2\ln(3) & \text{car } \ln a^n = n\ln a \\
(1-n)\ln(3) = 7\ln(3) & \\
1-n = 7 & \\
8 = n &
\end{array}$$

Exercice 3 - non spécialistes

1. Limites

Calculons la limite de $\dfrac{x+1}{x-1}$ à l'infini.

Pour $x \neq 0$ on a : $\quad \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on peut déduire de la forme précédente : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x) = \ln(1) = 0\end{array}\right\} \text{ entraine } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \\ \text{et comme } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-x+4) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Soit h un réel positif. Calculons $f(1+h)$:

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= -(1+h) + 4 + \frac{1+h+1}{1+h-1} = 3 - h + \frac{2+h}{h} \\
&= 3 - h + h + \frac{2}{h} = 3 + \frac{2}{h}
\end{aligned}$$

On a donc : $\quad \displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \left(3+\frac{2}{h}\right) = +\infty$

2. Variations

Soient u et v les fonctions définies sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = -x + 4 \qquad \text{et} \quad v(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $]1\,;+\infty[$ et, comme $f = u + \ln \circ v$, on a :

$$f' = u' + (\ln' \circ v) \times v' = u' + \frac{v'}{v}$$

Pour tout réel de $]1\,;+\infty[$: $u'(x) = -1$

$$v'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

et par conséquent :

$$f'(x) = -1 + \frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} - 1$$

$$= \frac{-2}{(x-1)(x+1)} - 1 = \frac{-2-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{-2-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2-1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, les facteurs (x^2+1), $(x+1)$, et $(x-1)$ sont positifs, donc $f'(x)$ est négatif. On en déduit que f est une fonction décroissante sur son ensemble de définition.

3. Asymptote

Soit g la fonction affine définie par : $g(x) = -x + 4$. Soit (D) la droite représentant g. (D) a pour équation $y = -x + 4$.

Considérons la différence $d(x)$ d'ordonnées entre deux points d'abscisse x : l'un situé sur (C), l'autre sur (D).

$$d(x) = f(x) - g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

On a vu dans la question 1 que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0$.

On en conclut donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, ce qui nous prouve que la courbe (C) et la droite (D) sont asymptotes à l'infini.

Étudions le signe de l'expression $\dfrac{x+1}{x-1} - 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{(x+1)-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

Numérateur et dénominateur étant positifs sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, l'expression est positive sur cet intervalle. On en déduit alors :

$$\frac{x+1}{x-1}-1>0 \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{x+1}{x-1}>1$$

De ce résultat, sachant que la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit successivement :

$$\begin{array}{rcl} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & > & \ln(1) \\ \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & > & 0 \\ -x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & > & -x+4 \\ f(x) & > & g(x) \end{array}$$

De deux points de même abscisse, l'un sur (C), l'autre sur (D), celui qui appartient à (C) a donc l'ordonnée la plus grande. Cela prouve que la droite (D) est située en dessous de la courbe (C).

4. Tangente à la courbe

La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$. L'abscisse du point cherché est donc une solution de l'équation :

$$x\in]1\,;+\infty[,\ f'(x)=-\frac{5}{3}$$

Sur $]1\,;+\infty[$ cette équation est équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{5}{3} & = & \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \\ 0 & = & \dfrac{5}{3}+\dfrac{x^2+1}{3(x^2-1)} \\ 0 & = & \dfrac{5(x^2-1)+3(x^2+1)}{3(x^2-1)} \\ 0 & = & \dfrac{8x^2-2}{3(x^2-1)} \end{array}$$

En multipliant les deux membres par $3(x^2-1)$ on obtient :

$$x\in]1\quad;+\infty[,\ 8x^2-2=0$$

puis, en factorisant : $\quad x\in]1\,;+\infty[,\quad 2(x-2)(x+2)=0$

La seule solution de ces équations est 2 ; c'est l'abscisse du point cherché. L'ordonnée de ce point est : $\quad f(2)=2+\ln(3)\approx 3$

5. Résolution d'équation

On a : $f(4) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,5$

$f(5) = -1 + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx -0,6$

La fonction f, qui est continue puisqu'elle est dérivable sur $]1\,;+\infty[$, donnera sur l'intervalle $[4\,;5]$ toutes les valeurs intermédiaires à $f(4)$ et $f(5)$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Puisque $f(4)$ est positif et que $f(5)$ est négatif, 0 est une ces ces valeurs intermédiaires. Il sera donc l'image d'au moins un réel α compris entre 4 et 5.

Par ailleurs, il est impossible que deux réels aient pour image 0 par f puisque f est croissante sur $]1\,;+\infty[$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α qui appartient à l'intervalle $[4\,;5]$.

La calculette indique : $f(4,45) \approx 7,2 \times 10^{-3}$
$f(4,46) \approx -3,8 \times 10^{-3}$

On peut donc dire[1] que $\alpha > 4,45$ car, selon la décroissance de f, l'hypothèse contraire ($\alpha \leqslant 4,45$) conduirait à l'absurde ($0 \geqslant 7,2 \times 10^{-3}$).

Suivant le même raisonnement, on montre que $\alpha < 4,45$

Toute valeur appartenant à l'intervalle $[4,44\,;4,45]$ est une valeur approchée au centième de α. On prendra par exemple[2] :

$$\alpha = \frac{209}{47}$$

Exercice 4

1. Dérivation

Soient u, v, et w les fonctions définies sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$u : x \longmapsto \frac{x^2-1}{2} \qquad v : x \longmapsto x+1 \qquad w : x \longmapsto -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

On a : $f = u \times (\ln \circ v) + w$ et par conséquent : $f' = u' \times (ln \circ v) + u \times (\ln \circ v)' + w'$

Les fonctions u, v, et w sont aisément calculables :

$$u' : x \longmapsto x \qquad v : x \longmapsto 1 \qquad w : x \longmapsto -x - \frac{1}{2}$$

[1] On pourrait aussi reprendre l'argument de la continuité de f sur l'intervalle $[4,45\,;4,45]$, l'existence et l'unicité de α ayant déjà été démontrées.

[2] C'est une provocation. On pourrait prendre aussi 4,44 (valeur *arrondie par défaut*), ou 4,444, ou encore 4,444444444 . . . !

et, pour ce qui est de $\ln\circ v$ on a : $(\ln\circ v)' = (\ln'\circ v)\times v' = \dfrac{1}{v}\times v' = \dfrac{v'}{v}$

Nous pouvons donc exprimer $f'(x)$:

$$f'(x) = x\ln(x+1) + \frac{x^2-1}{2}\times\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{2}$$

et éventuellement simplifier et réduire :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\ln(x+1) + \frac{(x+1)(x-1)}{2}\times\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{2} \\ &= x\ln(x+1) + \frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{2} \\ &= x\ln(x+1) - \frac{x-2}{2} \end{aligned}$$

2. Sens de variation

Soient u et v les fonctions définies sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$u' : x \longmapsto \frac{2x-5}{x-1} \qquad \text{et} \quad v : x \longmapsto x-1$$

On a : $f = u + \ln\circ v$ et par conséquent : $f' = u' + \dfrac{v'}{v}$.

Nous pouvons donc exprimer $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)-1(2x-5)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x+2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Numérateur et dénominateur de ce quotient sont positifs sur $]1\,;+\infty[$, donc sur son ensemble de définition, f est croissante.

Vous êtes autorisé(e) à copier, distribuer et/ou modifier ce document selon les termes de la licence GNU Free Documentation License Version 1.1 ou ultérieure, publiée par la Free Software Foundation. Le source LaTeX, ainsi que des copies au format pdf, ps, et html de ce document sont accessibles sur le site classe.maisondecole.net. La version originale de la licence, accompagnée d'une traduction en français, est également disponible sur ce site.