TES *DM n° 6 janvier 2004*

Exercice 1:

A l'issue d'une compéttion, des sportifs sont contrôlés par un comité antidopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part certains produits restent indétectables aux contrôles, d'autre part certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif; le comité prend dons sa décision avec un risuqe d'erreur. On note :

D l'événement « le sportif est dopé », O l'événement « le sportif est déclaré positif » et E l'événement « le comité a commis une erreur ».

1. Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs 50 % ne sont pas dopés et que la probabilité d'être déclaré positif est indépendante de l'état réel du sportif (dopé ou non). Lors d'une étude sur des compétitions antérieures on a pu observé que ce comité déclarait positifs 20 % des sportifs. On choisit un sportif au hasard, Calculer
   a) la probabilité qu'il soit non dopé et déclaré positif.
   b) La probabilité qu'il soit dopé et déclaré négatif.
   c) La probabilité de l'événement E.
2. Dans cette question, on note p la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés. La probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est 0,9. La probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est 0,1. On choisit un sportif au hasard.
   a) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
   b) Calculer la probabilité de E.
   c) Calculer, en fonction de p, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.
   d) On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé.
   Montrer que cettte probabilité notée f(p) est f(p) = $\dfrac{0{,}9\,p}{0{,}8\,p+0{,}1}$.

Exercice 2:

Deux magasins M_1 et M_2 d'une même firme ont respectivement besoin, chaque semaine, de 100 kg et de 120 kg d'un même produit. Ils achètent ce produit à deux usines U_1 et U_2 qui en fabriquent respectivement 130 kg et 90 kg par semaine. On observe que l'offre est égale à la demande.

Les coûts du kilogramme de ce produit, achat et transport compris, sont respectivement :

- de U_1 à M_1 : 60 € ;
- de U_1 à M_2 : 30 € ;
- de U_2 à M_1 : 40 € ;
- de U_2 à M_2 : 20 €.

La firme veut déterminer une politique d'approvisionnement optimale, c'est-à-dire au moindre coût.

On désignera par x, y, z et t les quantités respectives en kilogrammes de produit allant respectivement de U_1 à M_1, de U_1 à M_2, de U_2 à M_1 et de U_2 à M_2.

1- Écrire, en les justifiant, les quatre équations qui expriment que la demande des magasins est satisfaite et que les usines vendent complètement leur production.

Montrer que y, z et t s'expriment en fonction de x seul.

2- Les quantités x, y, z, t étant positives ou nulles, montrer que x appartient à l'intervalle $[10, 100]$.

3- Exprimer le coût total de l'approvisionnement $f(x)$ en fonction de x.

Déterminer le minimum de ce coût pour x appartenant à l'intervalle $[10, 100]$.

En déduire comment se fera alors l'approvisionnement optimal des magasins M_1 et M_2.

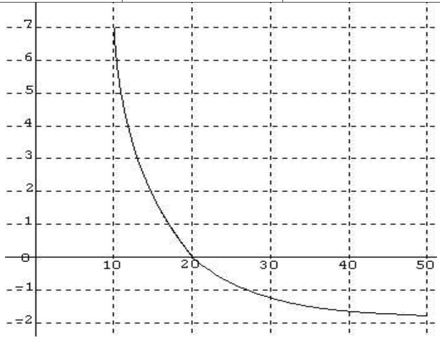
TES *DM n° 6 janvier 2004*

Problème :

• Etude graphique

On considère la fonction g donnée sur I = [10 ; 50] par sa représentation graphique et le tableau de valeurs ci-dessous :

x	10	20	50
$g(x)$	7	0	-1,8



1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser le signe de $g(x)$ sur I.

2. Soit G une primitive de g sur I.

a) Quelle est la particularité de la courbe représentative de G au point d'abscisse 20 ?

b) L'une des 3 courbes données en annexe est représentative de la fonction G. Déterminer laquelle en donnant toutes les justifications.

• Etude de propriétés d'une fonction

Soit f la fonction définie sur I = [10 ; 50] par : $f(x) = \dfrac{100}{x}(3 - \ln x)$.

1. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur I.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{100}{x^2}(\ln x - 4)$.

2. Etudier le signe de f' sur I. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. Calculer $f(e^3)$. En déduire le signe de f sur I.

4. Soit la fonction F définie sur I par : $F(x) = -50(\ln x - 3)^2 + 30$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur I.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction F.

5. Donner trois raisons qui permettent de considérer la fonction g de la **première partie** comme une bonne approximation de la fonction f.

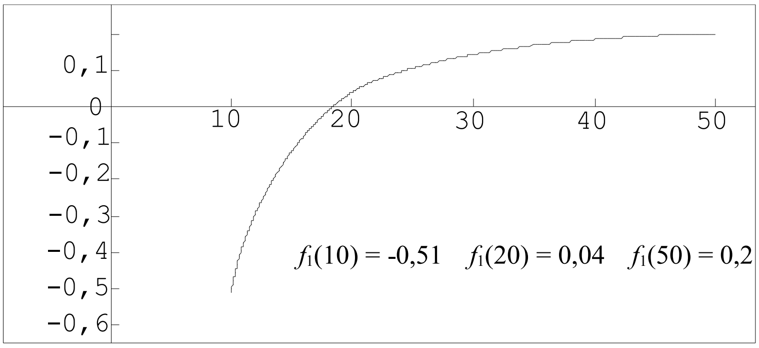
Troisième partie

La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie, peut en produire jusqu'à 50 par mois. Son bénéfice, pour q unités produites (q entier entre 10 et 50), est donné par :
$B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30$ en milliers d'euros.

1. A partir des études précédentes, ou de la calculatrice, déterminer l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un bénéfice positif.

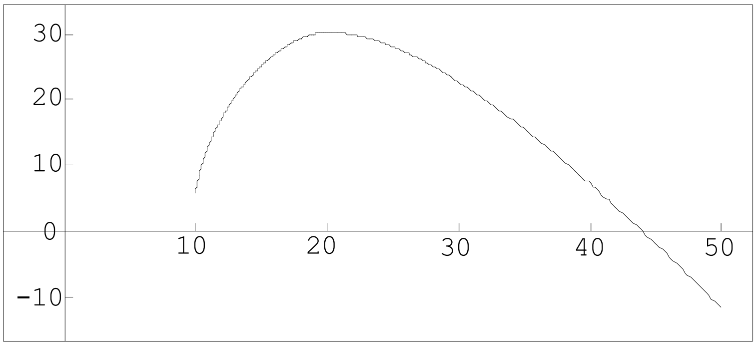
2. Déterminer la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum. Préciser ce bénéfice maximum.

Annexe



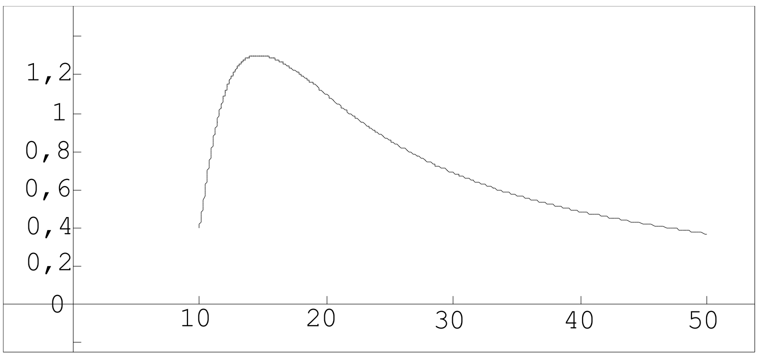
$f_1(10) = -0,51$ $f_1(20) = 0,04$ $f_1(50) = 0,2$

Courbe 1



$f_2(10) = 5,68$ $f_2(20) = 30$ $f_2(50) = 11,6$

Courbe 2



$f_3(10) = 0,4$ $f_3(20) = 1,1$ $f_3(50) = 0,37$

Courbe 3

TES *DM n° 6 janvier 2004*

Problème :

Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

Partie A

La courbe (C), **donnée en annexe**, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$.
Le point A a pour coordonnées (0 ; 2). La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A.

1. Préciser $h(0)$. Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. Justifier.

2. La fonction h, définie sur $[0 ; +\infty[$ est de la forme : $h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$ où a, b et c sont des nombres réels. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et la question **1.**, déterminer a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $I = [0 ; 5]$ par : $f(x) = -3x + 2 + 2\ln(x+1)$.

1. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$.

c) Etudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.

d) En déduire les variations de f sur [0 ; 5].

2. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction g.

b) En déduire une primitive de la fonction f sur I.

c) Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Partie C

Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d'un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en **milliers** de litres, x variant sur l'intervalle [0 ; 5]. $f(x)$ représente le coût marginal en **milliers** d'euros.

1. Quel est le coût marginal, en euros, du 3000[e] litre produit ?

2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (Donner la valeur au litre près.)

3. Les coûts fixes sont de 1000 euros.

a) Montrer, en utilisant le résultat de la partie **B**, question **2. b)**, que le coût total est donné par l'expression définie sur [0 ; 5] par : $C(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1$.

b) Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
Comparer ce résultat à celui trouvé à la partie **B**, **2. c)** et expliquer cette réponse.

Annexe au problème