Classe : TES1 Le 17/12/2002

MATHEMATIQUES

Devoir N°4

Calculatrice et formulaire autorisés Durée : 3h

Exercice 1 : (5,5 *points*) (correction)

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et P(A) la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ».

Quelle est la probabilité que :

a) Cet élève soit un garçon ?

b) Cet élève soit une fille qui fume ?

c) Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que P(A) = 0,36.

3. L'enquête permet de savoir que :

- Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».

On notera $P_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.

En déduire P(B).

b) Calculer $P_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculer $P_{\overline{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

A l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

Exercice 2 : (4,5 *points*) (correction)

Une entreprise fabrique un produit liquide.

On note x la quantité produite quotidiennement (en hectolitres).

$C_m(x)$ est le coût marginal (en euros). C_m est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $C_m(x) = 4x$.

Les coûts fixes s'élèvent à 3200 €.

1. a) La fonction coût total, notée C_T est la primitive de la fonction C_m sur $[0 ; +\infty[$ telle que $C_T(0) = 3200$. Exprimer $C_T(x)$ en fonction de x.

b) Le coût moyen est la fonction M définie sur $]0 ; +\infty[$ par $M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

Exprimer $M(x)$ en fonction de x.

c) Pour quelle quantité le coût moyen est-il égal au coût marginal ?

2. Toute la production est vendue à un prix de 808 € de l'hectolitre imposé par le marché.

a) Démontrer que le profit est $b(x) = -2x^2 + 808x - 3200$.

b) Pour quelles quantités la production est-elle rentable ?

c) Déterminer la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal.

Comparer alors le coût marginal et le prix de vente.

Problème : (10 *points*)

PARTIE A (correction)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} + 1$.

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$. En déduire le signe de $g'(x)$.

2. Déterminer la limite de g en 0.

3. Donner le tableau de variation de g (on ne demande pas la limite de g en $+\infty$).
En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B (correction)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\sqrt{x}}$ où f' est la fonction dérivée de f.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0, comprise dans l'intervalle $[4\,;5]$.
A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

4. a) Calculer la limite de $[f(x) - x]$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 4.

5. Tracer $(\mathcal{C})$, (T) et les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Correction du DST N°4

Exercice 1 : (retour à l'énoncé)

1. a) $P(\overline{F}) = 1 - P(F)$ et $P(F) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$.
$= 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b) On cherche $P(F\cap A)$: $P(F\cap A) = P_F(A) \times P(F)$ et $P_F(A) = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$.

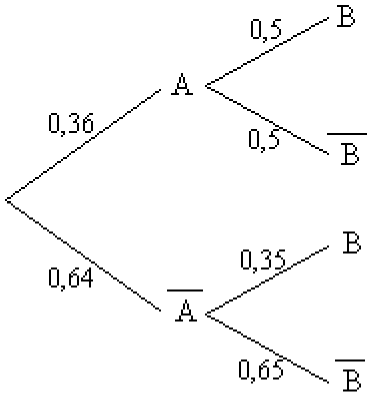
$P(F \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.

c) On cherche $P(\overline{F} \cap A)$: $P(\overline{F} \cap A) = P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F})$ et $P_{\overline{F}}(A) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$

$P(\overline{F} \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.

2. $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap \overline{F}) = 0{,}24 + 0{,}12 = 0{,}36$.

3. Arbre pondéré :



a) $P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}36 = 0{,}18$.
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}64 \times 0{,}35 = 0{,}224$.

Alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$= 0{,}18 + 0{,}224 = 0{,}404$.

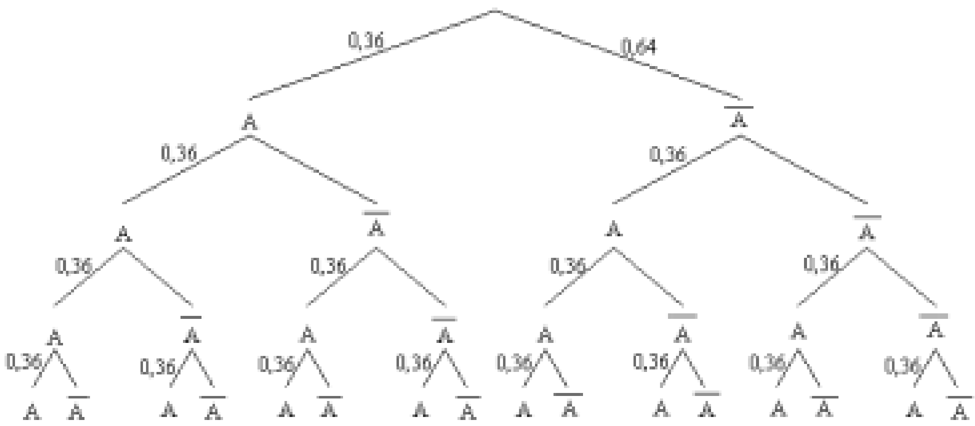
b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}404} \approx 0{,}446$.

$P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}596$ de plus $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}36 \times 0{,}5 = 0{,}18$.

Donc $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{0{,}18}{0{,}596} \approx 0{,}302$.

Un élève qui a des parents fumeurs a donc plus de chance de se mettre à fumer qu'un élève qui a des parents non-fumeurs.

4. On obtient l'arbre pondéré ci-dessous :



L'événement aucun élève ne fume est représenté sur l'arbre par la branche contenant quatre événements $\overline{A}$.

La probabilité cherchée est alors égale à : $(0{,}64)^4 \approx 0{,}168$.

Exercice 2 : (retour à l'énoncé)

C_m est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $C_m(x) = 4x$.

1. a) C_T est la primitive de C_m sur $[0 ; +\infty[$ telle que $C_T(0) = 3200$.

C_m est une fonction continue sur $[0 ; +\infty[$, elle admet alors des primitives sur cet intervalle.

Les primitives de C_m sont de la forme :

$C_T(x) = 2x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$. De plus $C_T(0) = 3200$ et $C_T(0) = 2 \times 0^2 + k = k$.

Donc $k = 3200$ et $C_T(x) = 2x^2 + 3200$.

b) $M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x} = \dfrac{2x^2 + 3200}{x}$

c) Le coût moyen est égal au coût marginal signifie :

$M(x) = C_m(x)$ c'est à dire $4x = \dfrac{2x^2 + 3200}{x}$

d'où : $4x^2 = 2x^2 + 3200$ c'est à dire $2x^2 = 3200$ et $x^2 = 1600$.

Les solutions sont 40 et -40 et comme $x \geq 0$, on conclut que $x = 40$.

Donc, le coût moyen est égal au coût marginal pour une production de 40 hL.

2. a) Le profit est le prix de vente déduit des coûts de production :

$b(x) = 808x - C_T(x) = 808x - (2x^2 + 3200) = -2x^2 - 808x - 3200$.

b) La production est rentable lorsque $b(x) > 0$.

On cherche alors les racines de $b(x)$.

$\Delta = 808^2 - 4 \times (-2) \times (-3200) = 627\,264$ et $\sqrt{\Delta} = 792$.

Les racines sont alors : $x_1 = \dfrac{-808 - 792}{-2 \times 2} = 400$ et $x_2 = \dfrac{-808 + 792}{-2 \times 2} = 4$.

et $b(x) > 0$ pour $x \in]4 ; 400[$.

La production est alors rentable entre 4 et 400 hectolitres.

c) Le bénéfice est maximal pour x vérifiant $b'(x) = 0$.
$b'(x) = -4x + 808$ et $b'(x) = 0$ signifie $-4x + 808 = 0$, c'est à dire $x = 202$.
Le bénéfice est maximal pour une production de 202 hectolitres.
$C_m(202) = 4 \times 202 = 808$
Dans ce cas, le coût marginal est égal au prix de vente.

<u>Problème :</u>
PARTIE A : (retour à l'énoncé)

g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} + 1$.

1. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} + 1$ où $u(x) = x^2 + 1$; $u'(x) = 2x$

$g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $v(x) = \sqrt{x}$; $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - (x^2+1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4x^2 - x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$$

or pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $2x\sqrt{x} > 0$.

et $3x^2 - 1 = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sur $]0 ; +\infty[$.

donc $g'(x) > 0$ pour $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $g'(x) < 0$ pour $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

3. Tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{\frac{1}{3}+1}{\sqrt{1/\sqrt{3}}} + 1$

or $g(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ et g est décroissante sur $]0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty[$.

Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.

PARTIE B : (retour à l'énoncé)

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est alors asymptote à la courbe (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}$$

et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ $\quad x\sqrt{x} > 0$ et $g(x) > 0$.
donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.
la fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
Tableau de variation de f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

3. f est continue sur $]0 ; +\infty[$, f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
L'équation $f(x) = 3$ admet alors une unique solution x_0 sur $]0 ; +\infty[$.
De plus $f(4) = 2{,}75$ et $f(5) \approx 3{,}91$ donc $x_0 \in [4 ; 5]$
Enfin $f(4{,}21) \approx 2{,}998$ et $f(4{,}22) \approx 3{,}001$. Donc $x_0 \in [4{,}21 ; 4{,}22]$.

4. a) $f(x) - x = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$
Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
b) $f(x) - x = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
or pour toute $x \in]0 ; +\infty[$, $-\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} < 0$, c'est à dire : $f(x) - x < 0$
la courbe est donc toujours située en-dessous de la droite d'équation $y = x$.

c) Une équation de la tangente (T) à (C) en A est : $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$.

$$f'(4) = \frac{\frac{4^2+1}{\sqrt{4}} + 1}{4 \times \sqrt{4}} = \frac{\frac{17}{2} + 1}{8} = \frac{19}{16}$$

$$f(4) = 4 - \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 4 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{11}{4}.$$

L'équation est alors : $y = \frac{19}{16}(x - 4) + \frac{11}{4}$

$$y = \frac{19}{16}x - \frac{19}{4} + \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{19}{16}x - 2.$$