Exercice :

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités graphiques : $\frac{1}{4}$ cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0; 60]$ par : $g(x) = \dfrac{x-8}{10(x+2)}$.

On désigne par Γ sa courbe représentative relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction g.
   (b) Etudier le sens de variation de la fonction g.
   (c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées, puis avec l'axe des abscisses.
   (d) Déterminer le signe de la fonction g sur I.
2. Démontrer que Γ admet en un point A et un seul une tangente parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{9}x + 10$.
3. (a) Vérifier que, pour tout x de I, $g(x) = \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{1}{10}$.
   (b) Déterminer une primitive de la fonction g sur I.
   (c) Calculer le nombre réel $\displaystyle\int_{10}^{20} g(x)\, dx$. Préciser, en justifiant, ce que représente géométriquement ce nombre.

Partie B

On considère la fonction B définie sur $I = [0; 60]$ par : $B(x) = 0,1x - \ln(x+2) - 1$.

1. (a) Démontrer que la fonction B est dérivable sur I.
   (b) Démontrer que pour tout réel x appartenant à I on a : $B'(x) = g(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de B.
2. (a) Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[49; 50]$ une solution et une seule. On note α cette solution.
   (b) Déterminer unn encadrement à 10^{-1} près de α.
   (c) Déduire des question 1. (c) et 2. (a) que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle $I = [0; 60]$ une solution et une seule.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction B dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

Une entreprise produit quotidiennement x voitures $(0 \leq x \leq 60)$ pour un coût total exprimé en millions de francs par : $C(x) = 0,2x + \ln(x+2) + 1$.

Chaque voiture produite est vendue, et ce, au prix de 300 000 francs.

On appelle $R(x)$ la recette totale (en millions de francs) résultant de la vente de x voitures.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Exprimer le terme $R(x) - c(x)$ en fonction de x. Que représente ce terme ?
3. Déterminer le nombre minimal de voitures à fabriquer journellement pour rentabiliser l'entreprise ?
4. Pour quelle production quotidienne de voitures la perte de l'entreprise est-elle maximale ?

Correction de l'exercice :

g est définie sur $I = [0; 60]$ par : $g(x) = \dfrac{x-8}{10(x+2)}$

PARTIE A

1. (a) g est dérivable sur I.

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{où} \quad u(x) = x - 8 \quad u'(x) = 1$$
$$v(x) = 10(x+2) \quad v'(x) = 10$$
$$g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$g'(x) = \frac{1 \times 10(x+2) - 10(x-8)}{(10(x+2))^2} = \frac{x+2-x+8}{10(x+2)^2} = \frac{10}{10(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

   (b) or $g'(x) > 0$ sur I, donc g est strictement croissante sur I.

   (c) on calcule $g(0)$: $g(0) = \dfrac{0-8}{10(0+2)} = -\dfrac{8}{20} = -\dfrac{2}{5}$

   Les point d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0; -\dfrac{2}{5}\right)$.

   On résout $g(x) = 0$ ce qui donne $\dfrac{x-8}{10(x+2)} = 0$ et $x - 8 = 0$ d'où $x = 8$.

   Le point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(8; 0)$.

   (d) g est strictement croissante sur I et $g(8) = 0$

   donc $g(x) > 0$ sur $]8; 60]$
   $g(x) < 0$ sur $[0; 8[$
   $g(x) = 0$ pour $x = 8$

2. Si elle existe la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{9}$

   On résout alors $g'(x) = \dfrac{1}{9}$ équivaut à $\dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{9}$

   d'où $(x+2)^2 = 9$ et $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$
   $x = 1$ $x = -5$

   mais $x \in [0; 60]$, donc $x = 1$ est la seule solution.

   $g(1) = \dfrac{1-8}{10(1+2)} = \dfrac{-7}{30}$

   Donc il existe un unique point A en lequel la tangente à Γ est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{9}x + 10$ et A a pour coordonnées $\left(1; -\dfrac{7}{30}\right)$.

3. (a) $\dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{-10}{10(x+2)} + \dfrac{x+2}{10(x+2)} = \dfrac{x-8}{10(x+2)} = g(x)$

(b) Une primitive sur I de $x \longmapsto \dfrac{-1}{x+2}$ est $x \longmapsto -\ln(x+2)$

Donc une primitive de g sur I est : $G : x \longmapsto -\ln(x+2) + \dfrac{1}{10}x$

(c) $$\int_{10}^{20} g(x)\,dx = G(20) - G(10)$$
$$= \left(-\ln(20+2) + \frac{1}{10} \times 20\right) - \left(-\ln(10+2) + \frac{1}{10} \times 10\right)$$
$$= -\ln(22) + 2 + \ln(12) - 1 = 1 + \ln\left(\frac{12}{22}\right) = 1 + \ln\left(\frac{6}{11}\right)$$

$\displaystyle\int_{10}^{20} g(x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 10$ et $x = 20$.

PARTIE B

B est définie sur $I = [0;60]$ par $B(x) = 0,1x - \ln(x+2) - 1$

1. (a) B est la somme de fonctions dérivables sur I.
   Donc B est dérivable sur I.

   (b) $B(x) = 0,1x - \ln(u(x)) - 1$ où $u(x) = x+2$ $u'(x) = 1$

   $B'(x) = 0,1 - \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 0,1 - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{x+2} = g(x)$

   $B'(x)$ est alors du signe de $g(x)$

   Tableau de variation de B :

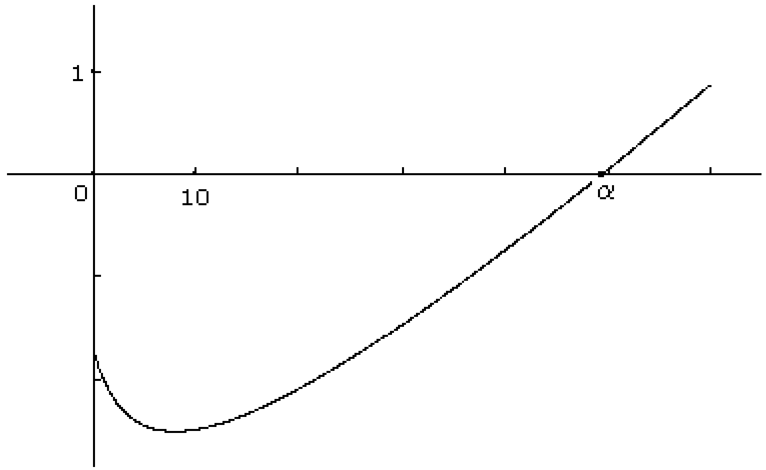
x	0	8	60
$B'(x)$	-	0	+
B	$B(0)$ ↘	$B(8)$	↗ $B(60)$

   $B(0) = 0,1 \times 0 - \ln(0+2) - 1$
   $= -\ln 2 - 1$
   $B(8) = 0,1 \times 8 - \ln(8+2) - 1$
   $= -0,2 - \ln(10)$
   $B(60) = 0,1 \times 60 - \ln(60+2) - 1$
   $= 5 - \ln(62)$

2. (a) B est continue sur $[0;60]$
   B est strictement croissante sur $]8;60[$
   $B(49) = 0,1 \times 49 - \ln(49+2) - 1 = 3,9 - \ln(51) < 0$
   $B(50) = 0,1 \times 50 - \ln(50+2) - 1 = 4 - \ln(52) > 0$
   d'où $0 \in]B(49);B(50)[$
   donc l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[49;50]$

   (b) $B(49,3) \simeq -0,0077$ et $B(49,4) \simeq 0,00036$ d'où $49,3 < \alpha < 49,4$

   (c) On obtient que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution sur $[8;60]$.
   De plus B est strictement décroissante sur $[0;8]$
   et $B(0) < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution sur $[0;8]$.
   on conclut que l'équation admet une unique solution α sur I.

3. 

PARTIE C

1. Chaque voiture est vendue 300 000 francs, c'est à dire 0,3 millions de francs, d'où $R(x) = 0,3x$.
2. $R(x) - C(x) = 0,3x - (0,2x + \ln(x+2) + 1)$
   $= 0,3x - 0,2x - \ln(x+2) - 1 = 0,1x - \ln(x+2) - 1 = B(x)$
   C'est le bénéfice réalisé pour la vente de x voitures.
3. L'entreprise est rentable lorsque $B(x) > 0$, c'est à dire lorsqu'il est vendu au moins 50 voitures.
4. La perte est maximale lorsque $B(x)$ est minimal, elle est donc maximale pour la vente de 8 voitures