Classe : TES1 Pour le 21/01/2004

MATHEMATIQUES

Devoir maison N°3

Exercice 1:

PARTIE A

La fonction g est définie, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, par : $g(x)=\frac{2x}{e}-1-\ln x$.

1. (a) Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g. Etudier son signe et en déduire le sens de variation de g.

   (b) Calculer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$. (On pourra écrire : $g(x)=x\left[\frac{2}{e}-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right]$).

   (c) Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g\left(\frac{e}{2}\right)$.

   (d) Dresser le tableau de variation de g.

2. (a) Calculer $g(e)$ et justifier que $g(x)\geq 0$ pour $x\geq e$.

   (b) Montrer que g s'annule sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right]$ pour une valeur unique que l'on notera α.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).

   (a) Tracer la courbe représentative Γ de la fonction g. Placer, en particulier, les points d'abscisses α et e.

   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)\geq 0$.

PARTIE B

La fonction f est définie, sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, par : $f(x)=\frac{x^2}{e}-x\ln x$.

1. Vérifier que $f'(x)=g(x)$. En déduire le tableau de variation de f.

2. Justifier que f est positive ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

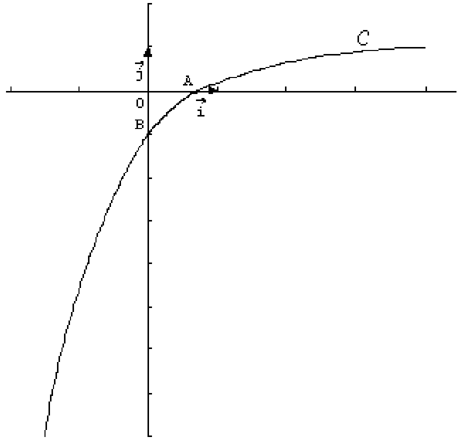
   On ne demande pas de représenter graphiquement f.

PARTIE C

La fonction g représente le chiffre d'affaire marginal d'une entreprise, en fonction du nombre de ses employés. C'est la dérivée de la fonction correspondant au chiffre d'affaires exprimé en euros.

Déterminer ce chiffre d'affaires, sachant qu'il est nul pour un employé.

Exercice 2:



Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};4\right]$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de **la fonction dérivée de** f' de la fonction f est tracée ci-contre dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Remarque : les points $A(\ln 2;0)$ et $B(0;-1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition. Justifier la réponse.

   La représentation graphique de f est appelée Γ.

2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

3. Dans cette question, on suppose $f(\ln 2)=1$.

   Dire, pour chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse donnée, si elle est vraie, fausse ou si le texte ne permet pas de répondre :

   (a) la droite d'équation $y=1$ est tangente à Γ.

   (b) L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};4\right]$.

Correction du devoir maison N°3

Exercice 1:

PARTIE A

La fonction g est définie sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ par : $g(x)=\frac{2x}{e}-1-\ln x$.

1. (a) $g'(x)=\frac{2}{e}-\frac{1}{x}=\frac{2x-e}{ex}$

   or $ex>0$ sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ et $2x-e>0$ lorsque $x>\frac{e}{2}$.

   On a alors $g'(x)>0$ sur $\left]\frac{e}{2}:+\infty\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left[\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right[$. Donc g est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{e}{2};+\infty\right[$.

   (b) $g(x)=x\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e}-\frac{1}{x}=\frac{2}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

   (c) $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}\times\frac{1}{e}-1-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e^2}-1+\ln e=\frac{2}{e^2}$

   $g\left(\frac{2}{e}\right)=\frac{2}{e}\times\frac{e}{2}-1-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=1-1-\ln e+\ln 2=\ln 2-1.$

   (d) Tableau de variation de g :

x	$\frac{1}{e}$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$\ln 2-1$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) $g(e)=\frac{2e}{e}-1-\ln e=2-1-1=0$

   or g est strictement croissante sur $\left]\frac{e}{2};+\infty\right[$ et $g(e)=0$,

   donc $g(x)\geq 0$ sur $[e;+\infty[$ et $g(x)<0$ sur $\left]\frac{e}{2};e\right[$

   (b) sur $\left]\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right[$, g est continue et strictement décroissante

   $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e^2}>0$ et $g\left(\frac{e}{2}\right)=\ln 2-1<0$

   donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\left]\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right[$

   de plus $g(0,55)\simeq 0,0025$ et $g(0,56)\simeq -0,0082$ alors $0,55<\alpha<0,56$.

3. On a alors $g(x)\geq 0$ lorsque $x\in\left[\frac{1}{e};\alpha\right]\cup[e;+\infty[$.

PARTIE B

f est la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{e}-x\ln x$.

1. $f(x)=\frac{x^2}{e}-u(x)\times v(x)$ où $u(x)=x$; $u'(x)=1$

   $v(x)=\ln x$; $v'(x)=\frac{1}{x}$

   $f'(x)=\frac{2x}{e}-(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))=\frac{2x}{e}-\left(1\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{e}-\ln x-1$

   $f'(x)=\frac{2x}{e}-1-\ln x=g(x)$

   on a alors $f'(x)>0$ sur $\left[\frac{1}{e};\alpha\right[\cup]e;+\infty[$ et $f'(x)<0$ sur $]\alpha;e[$

   Tableau de variation de f :

x	$\frac{1}{e}$		α		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{e}-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e}$; $f(e)=\frac{e^2}{e}-e\ln e=e-e=0$

   $f(x)=x^2\left(\frac{1}{e}-\frac{\ln x}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e};\alpha\right[$ et $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e}>0$,

   donc $f(x)>0$ sur $\left[\frac{1}{e};\alpha\right[$

   sur $]\alpha;+\infty[$, f admet un minimum égal à 0, alors $f(x)\geq 0$ sur $]\alpha;+\infty[$,

   donc $f(x)\geq 0$ sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$

PARTIE C

Le chiffre d'affaire est alors une primitive de la fonction g. Il est donc de la forme $G(x)=f(x)+k$ où $k\in\mathbb{R}$

De plus, ce chiffre d'affaire est nul pour un employé, c'est à dire :

$f(1)+k=0$ ce qui donne $\frac{1}{e}-1\ln 1+k=0$ donc $k=-\frac{1}{e}$

et le chiffre d'affaire est : $G(x) = \dfrac{x^2}{e} - \dfrac{1}{e} - x\ln x$.

Exercice 2: f est la fonction définie et dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}; 4\right]$.

Les points A et B sont sur la courbe $\mathcal{C}$, c'est à dire $f'(\ln 2) = 0$ et $f'(0) = -1$.

1. D'après la courbe, $f'(x) < 0$ sur $\left[-\dfrac{3}{2}; \ln 2\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\ln 2; 4]$

   donc f est strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}; \ln 2\right[$ et strictement croissante sur $]\ln 2; 4[$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 0 est $f'(0)$, c'est à dire -1.
3. (a) f est dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}; 4\right]$ et $f'(\ln 2) = 0$, donc la tangente à Γ au point d'abscisse $\ln 2$ est horizontale, de plus $f(\ln 2) = 1$, donc cette tangente a pour équation $y = 1$.

   (b) f est strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}; \ln 2\right[$ et strictement croissante sur $]\ln 2; 4]$, elle admet alors un minimum en $\ln 2$ et ce minimum vaut $f(\ln 2) = 1$.

   Donc $f(x) > 0$ sur $\left[-\dfrac{3}{2}; 4\right]$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[-\dfrac{3}{2}; 4\right]$.