Classe : TES1 Le 28/01/2004

MATHEMATIQUES

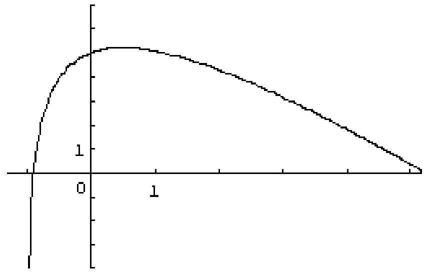
Interrogation

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative tracée dans le repère ci-contre.



1. (a) Calculer la limite de f en -1.
   Interpréter graphiquement le résultat.

   (b) En admettant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de f.
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

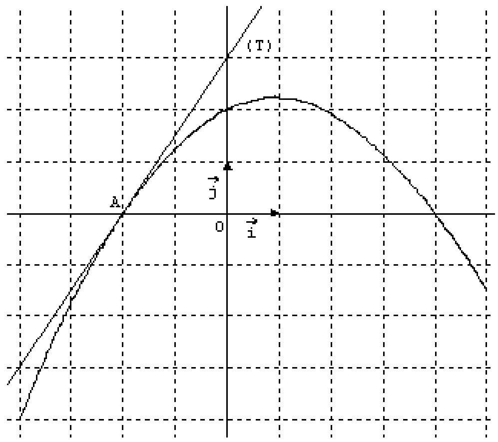
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β.

   (c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1;+\infty[$.
4. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.
   Calculer $g'(x)$.

Exercice 2:

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, trois affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. On demande de cocher la case associée.

- Chaque réponse exacte rapporte un demi point.
- Une réponse inexacte enlève un quart de point.
- Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
- Si le total est négatif, il est ramené à zéro.



La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;5]$. On note f' la fonction dérivée de f et F une primitive de f sur $]-4;5[$.
La droite (T) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -2.

1. d'après la courbe,

$f'(-2) = 0$ ☐

$f'(4) = 1$ ☐

$f'(1) = 0$ ☐

2. Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à :

$\frac{3}{2}$ ☐

0 ☐

$-\frac{3}{2}$ ☐

3. F est strictement croissante sur :

$]-4;5[$ ☐

$]-4;1[$ ☐

$]-2;4[$ ☐

4. En utilisant la courbe $\mathcal{C}$,

F admet un minimum pour $x = 4$ ☐

F admet un maximum pour $x = 1$ ☐

On ne peut pas savoir si F admet un extremum sur $]-4;5[$ ☐

5. La fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ a pour domaine de définition :

$]-4;1[$ ☐

$]-2;4[$ ☐

$]-4;5[$ ☐

Correction de l'interrogation

Exercice 1:

f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=-2x+5+3\ln(x+1)$.

1. (a) $\lim\limits_{x\to-1} -2x+5=7$; $\lim\limits_{x\to-1} x+1=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)=-\infty$
   donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ et la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

   (b) $f(x)=-2x+5+3\ln(x+1)=x\left(-2+\dfrac{5}{x}+3\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)$

   or $\lim\limits_{x\to+\infty} -2+\dfrac{5}{x}=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. $f(x)=-2x+5+3\ln(u(x))$ où $u(x)=x+1$; $u'(x)=1$

   $f'(x)=-2+3\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}=-2+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{-2x+1}{x+1}$

   or $x+1>0$ sur $]-1;+\infty[$ et $-2x+1>0$ pour $x\in\left]-1;\dfrac{1}{2}\right[$; $-2x+1<0$ pour $x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

   alors $f'(x)>0$ sur $\left]-1;\dfrac{1}{2}\right[$ et $f'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   Tableau de variation de f :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

   $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\times\dfrac{1}{2}+5+3\ln\left(\dfrac{1}{2}+1\right)=4+3\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$, donc le minimum de f vaut $4+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

3. (a) f est continue sur $]-1;+\infty[$

   - f est strictement croissante sur $\left]-1;\dfrac{1}{2}\right[$

     $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$, de plus $f(0)=-2\times0+5+\ln(0+1)=5>0$
     donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-1;0[$.
   - f est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

     donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   (b) $f(-0,9)\simeq-0,1$ et $f(-0,89)\simeq0,16$ donc $\alpha\simeq0,9$
   $f(5,24)\simeq0,01$ et $f(5,25)\simeq-0,0023$ donc $\beta\simeq5,25$

   (c) On déduit que $f(x)>0$ sur $\alpha;\beta[$; $f(x)<0$ sur $]-1;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$; $f(x)=0$ pour $x=\alpha$ et $x=\beta$

4. g est définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

   $g(x)=u(x)\times v(x)-x$ où $u(x)=x+1$; $u'(x)=1$

   $v(x)=\ln(x+1)$; $v'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

   $g'=u'v+uv'-1$

   $g'(x)=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)$

Exercice 2:

1. La tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse -2 n'est pas horizontale, donc $f'(-2)\neq0$
   La tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 4 est décroissante, son coefficient directeur est alors négatif, donc $f'(4)\neq1$
   La tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est horizontale, donc $f'(1)=0$
   Réponse 3

2. La droite (T) est croissante, son coefficient directeur est alors positif, donc c'est $\dfrac{3}{2}$

   Réponse 1

3. F est strictement croissante lorsque sa dérivée est strictement positive, et $F'(x) = f(x)$ car F est une primitive de f. De plus $f(x) > 0$ sur $]-2;4[$, donc F est strictement croissante sur $]-2;4[$

   Réponse 3

4. Grace à la courbe représentant f, on peut établir le tableau de variation de F :

x	-4		-2		4		5
$f(x)$		-	0	+	0	-	
F		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

   D'après ce tableau, on peut dire que F n'admet pas de minimum pour $x = 4$ et n'admet pas de maximum pour $x = 1$

   Réponse 3

5. La fonction g est définie lorsque $f(x) > 0$, c'est à dire pour $x \in]-2;4[$

   Réponse 2