Classe : TES1 Le 19/12/2003

MATHEMATIQUES

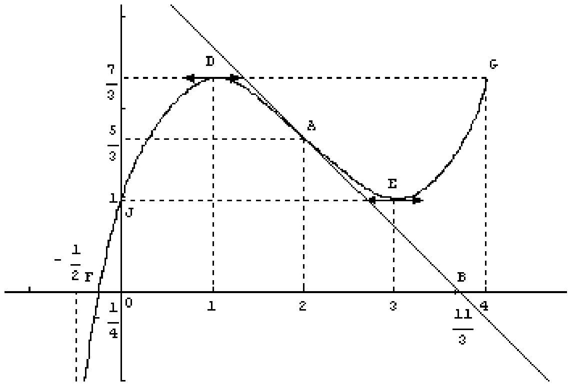
Devoir N°3

Calculatrice autorisée Durée : 3h

Exercice 1: (4,5 *points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Sur le graphique ci-contre, la courbe $(\mathcal{C})$ représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};4\right]$.



On précise que :

– la courbe $(\mathcal{C})$ passe par les points A, D, E, F, G et J de coordonnées respectives $\left(2;\frac{5}{3}\right)$, $\left(1;\frac{7}{3}\right)$, $(3;1)$, $\left(-\frac{1}{4};0\right)$, $\left(4;\frac{7}{3}\right)$ et $(0;1)$.

– la droite (AB) est tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$ et le point B a pour coordonnées $\left(\frac{11}{3};0\right)$.

– les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points D et E sont parallèles à l'axe des abscisses.

1. Sans fournir de justifications, indiquer :
   (a) les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(2)$;
   (b) les solutions, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};4\right]$, des inéquations $f(x) > 0$; $f(x) \geq 1$;
   (c) les solutions, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};4\right]$, de l'inéquation $f'(x) \leq 0$.
2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};4\right]$.
   (b) On note g la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{4};4\right]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Déterminer, en justifiant, le tableau de variation de g. (Faire figurer la limite de g en $-\frac{1}{4}$.)
   (c) On note h la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{4};4\right]$ par : $h(x) = \ln(f(x))$.
   Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $h(x)$ est positif ou nul ? Justifier la réponse.

Exercice 2: (4 *points*)

1. (a) Ecrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
   $A = \ln 18 - \ln 8 \qquad B = 3\ln 24 + \ln\left(\dfrac{1}{27}\right)$
   (b) Démontrer que : $\ln 8 + \ln(e^2) + 2\ln(4\sqrt{e}) = 7\ln 2 + 3$.
2. f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.
   (a) Etudier les limites de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.
   En déduire une équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3: (3,5 *points*)

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

   (b) On admet que $a = 1$, $b = 1$ et $c = -12$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :
   $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x - 24)$.

Exercice 4: (8 *points*)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{100}{x}(3 - \ln x)$.

1. (a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   (b) Donner une interprétation graphique des résultats.

2. (a) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{100}{x^2}(\ln x - 4)$.

3. Montrer que $f'(x) > 0$ sur $]e^4;+\infty[$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
4. Calculer $f(e^3)$. En déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$.
5. Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = -50(\ln x - 3)^2 + 30$.

   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction F, on calculera les limites aux bornes du domaine de définition.

6. La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie, peut en produire jusqu'à 50 par mois.
   Son bénéfice, pour q quantités produites (q entier compris entre 10 et 50), est donné par :
   $B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30$ en milliers d'euros.

   (a) A partir de la calculatrice, déterminer l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un bénéfice positif.

   (b) Déterminer la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum.
   Préciser ce bénéfice maximum.

Exercice 1:

1. (a) $f'(1) = 0$

   $f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0 - \frac{5}{3}}{\frac{11}{3} - 2} = \dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = -1.$

   (b) l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $\left]-\dfrac{1}{4}; 4\right]$.

   l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1$ est $[0; 4]$.

   (c) $f'(x) \leq 0$ lorsque la fonction f est décroissante, alors $f'(x) \leq 0$ sur $[1; 3]$.

2. (a)

   Tableau de variation de f :

x	$-\frac{1}{4}$		1		3		4
f	0	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$

   (b) g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{4}; 4\right]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

   $g'(x) = \dfrac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ or $(f(x))^2 > 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}; 4\right]$, donc $g'(x)$ est du signe de $-f'(x)$

   alors $g'(x) > 0$ sur $]1; 3[$; $g'(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}; 1\right[\cup]3; 4]$ et $g'(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 3$

   Tableau de variation de g :

x	$-\frac{1}{4}$		1		3		4
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{7}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{7}$

   $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} f(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} g(x) = +\infty$; $f(1) = \dfrac{7}{3}$ alors $g(1) = \dfrac{3}{7}$

   $f(3) = 1$ alors $g(1) = 1$; $f(4) = \dfrac{7}{3}$ alors $g(4) = \dfrac{3}{7}$.

   (c) h est la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{4}; 4\right]$ par : $h(x) = \ln(f(x))$.

   $h(x) \geq 0$ lorsque $f(x) \geq 1$ c'est à dire lorsque $x \in [0; 4]$.

Exercice 2:

1. (a) $A = \ln(18) - \ln 8 = \ln(2 \times 3^2) - \ln(2^3) = \ln 2 + \ln(3^2) - 3\ln 2 = -2\ln 2 + 2\ln 3$

   $B = 3\ln 24 + \ln\left(\dfrac{1}{27}\right) = 3\ln(2^3 \times 3) - \ln(3^3) = 3\ln(2^3) + 3\ln 3 - 3\ln 3 = 9\ln 2$

   (b) $\ln 8 + \ln(e^2) + 2\ln(4\sqrt{e}) = \ln(2^3) + 2 + 2(\ln 4 + \ln\sqrt{e}) = 3\ln 2 + 2 + 2\ln(2^2) + 2 \times \dfrac{1}{2}\ln e$

   $= 3\ln 2 + 2 + 4\ln 2 + 1 = 7\ln 2 + 3$

2. f une fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

   donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

   la droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote à la courbe représentative de f.

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0.$

   On a alors $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{1}{3}x = 0$

   et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exercice 3:

P est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1. (a) $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

   On a alors : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-14 \\ -2c=24 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-12 \end{cases}$

   donc $P(x) = (x-2)(x^2+x-12)$.

   (b) $P(x) = 0$ lorsque $x-2=0$, c'est à dire $x=2$ ou $x^2+x-12=0$

   on résout $x^2+x-12=0$

   $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-12) = 49$

   l'équation a alors deux solutions : $x1 = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2} = 3$

   donc les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont 2 ; 3 et -4.

2. On résout $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x-24)$

   il faut que $x > 0$, $x-1>0$, c'est à dire $x>1$ et $14x-24>0$, c'est à dire $x > \dfrac{12}{7}$

   donc on résout cette équation sur $\left]\dfrac{12}{7};+\infty\right[$

   et $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x-24) \iff \ln(x^2)+\ln(x-1) = \ln(14x-24)$

   $\iff \ln(x^2(x-1)) = \ln(14x-24)$ d'où $x^3-x^2 = 14x-24$ et $x^3-x^2-14x+24=0$

   et les solutions de cette dernière équation sont 2 ; 3 et -4, mais $-4 \notin \left]\dfrac{12}{7};+\infty\right[$.

   Donc les seules solutions de l'équation $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x-24)$ sont 2 et 3.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{100}{x}(3-\ln x)$.

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{100}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 3-\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

   $\dfrac{100}{x}(3-\ln x) = \dfrac{300}{x} - 100\dfrac{\ln x}{x}$

   or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{300}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$

   la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. $f(x) = u(x)\times v(x)$ où $u(x) = \dfrac{100}{x}$; $u'(x) = -\dfrac{100}{x^2}$

   $v(x) = 3-\ln x$; $v'(x) = -\dfrac{1}{x}$

   $f' = u'v+uv'$

   $f'(x) = -\dfrac{100}{x^2}(3-\ln x) + \dfrac{100}{x}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{300}{x^2} + \dfrac{100\ln x}{x^2} - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{100}{x^2}(\ln x - 4)$.

3. sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{100}{x^2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 4$

   $\ln x - 4 > 0$ ce qui donne $\ln x > 4$ donc $x > e^4$ alors $f'(x) > 0$ sur $]e^4;+\infty[$

   Tableau de variation de f :

   $f(e^4) = \dfrac{100}{e^4}(3-\ln(e^4)) = \dfrac{100}{e^4}(3-4) = -\dfrac{100}{e^4}$

x	0		e^4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{100}{e^4}$	$\nearrow$	0

4. $f(e^3) = \dfrac{100}{e^3}(3 - \ln 3) = \dfrac{100}{e^3}(3-3) = 0$

f est strictement décroissante sur $]0; e^4[$, alors $f(x) > 0$ sur $]0; e^3[$ et $f(x) < 0$ sur $]e^3; e^4]$

f est strictement croissante sur $]e^4; +\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $f(x) < 0$ sur $]e^4; +\infty[$.

Donc $f(x) > 0$ sur $]0; e^3[$; $f(x) < 0$ sur $]e^3; +\infty[$ et $f(x) = 0$ pour $x = e^3$.

5. F est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = -50(\ln x - 3) + 30$

   (a) $F(x) = -50(u(x))^2 + 30$ où $u(x) = \ln x - 3$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $F'(x) = -50 \times 2 \times u'(x) \times u(x)$

   $F'(x) = -100 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x - 3) = \dfrac{100}{x}(3 - \ln x) = f(x)$

   (b) alors $F'(x) > 0$ sur $]0; e^3[$ et $F'(x) < 0$ sur $]e^3; +\infty[$

   Tableau de variation de F :

x	0		e^3		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	
F			30		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x - 3)^2 = +\infty$

   donc $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 3)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$

   $F(e^3) = -50(\ln(e^3) - 3)^2 + 30 = -50(3-3)^2 + 30 = 30$

6. (a) On aura un bénéfice positif pour une quantité comprise entre 10 et 43.

   (b) On regarde le maximum de la fonction F ; il est atteint pour $x = e^3$.

   Donc le bénéfice est maximum pour une quantité produite égale à 20.

   Ce bénéfice sera d'environ 30000 euros.