Devoir de type bac n^o 4
Classe de terminale ES

Variations, limites, continuité, asymptotes, fonction logarithme, suites...

On veillera à détailler et à rédiger clairement les raisonnements, à soigner son écriture et sa présentation. Il en sera tenu largement compte.

N'hésitez pas à admettre le résultat d'une question pour pouvoir traiter les suivantes (en le signalant).

Traitez et rédigez correctement chaque question ; la qualité prime sur la quantité.

Énoncé

Exercice 1 - Enseignement de spécialité - 5pts

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 7 \qquad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout naturel n par :

$$v_n = u_n - 2$$

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

b) Exprimez v_n en fonction de n, et déduisez-en que :

$$u_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$$

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique $2\,cm$).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+6}{5}$$

a) Tracer la représentation graphique D de f ainsi que la droite Δ d'équation $x = y$.

b) Placer sur l'axe des abscisses le point P_0 d'abscisse u_0.

En utilisant les droites D et Δ, construisez les points P_1, P_2, P_3 de l'axe $(O\,;\vec{i})$ d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

À quoi correspond sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites Δ et D ?

Exercice 1 - Pour non spécialistes - 5pts

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On désigne par a, b, et c, trois nombres réels et on considère la fonction définie sur $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sa représentation graphique Γ est donnée ci-dessous (Fig. 1). $A(1\,;2)$ et $B(2\,;3)$ sont deux points de Γ ; la tangente à la courbe Γ au point A passe par le point $E(0\,;-1)$.

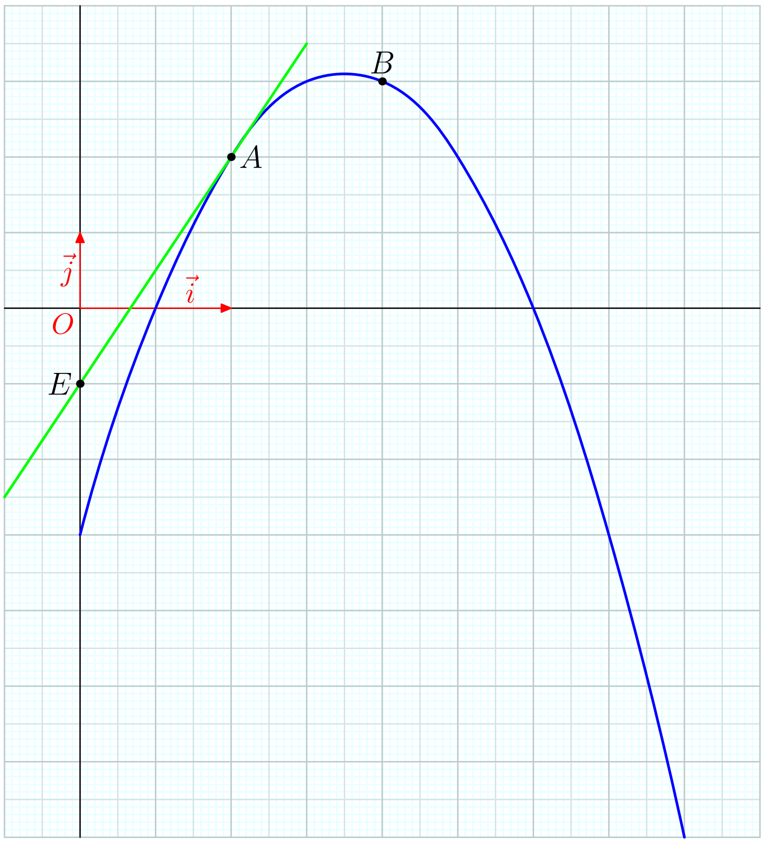

Fig. 1 – Exercice 1 - non spécialistes

1. À l'aide du graphique et en justifiant vos résultats :

   a) donner l'image par f de 1, puis l'image par f de 2 ;

   b) donner la valeur de $f'(1)$;

c) déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.

2. Déterminer les trois réels a, b et c.
3. Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;3\right[$ par :

$$g(x) = \ln(-2x^2 + 7x - 3)$$

Résoudre les équations :

a) $g(x) - 2\ln(3) = \ln\left(\frac{2}{9}\right)$

b) $g(x) = \ln(3 - x)$

D'après Bac ES - 2000,
Centre Étrangers 1

Exercice 2 - 7pts

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln(x)}{x}$$

On nomme C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$$

a) Étudier les variations de g (on ne demande pas le calcul des limites).

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$. Expliquer pourquoi α est l'unique solution dans l'intervalle I de l'équation $g(x) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. **a)** Démontrer que pour tout réel x de I :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire les variation de la fonction f.

b) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Tracer C.

Exercice 3 - 4pts

1. Démontrer que les courbes C et C' d'équations respectives :

$$y = x + \ln(2x + 1) - \ln(x) \qquad \text{et} \qquad y = x + \ln(2)$$

sont asymptotes en $+\infty$.

2. Déterminer leurs positions relatives.

Exercice 4 - 4pts

Vous devez répondre en choisissant parmi les propositions qui vous sont faites, celle(s) qui vous semblent exactes. Pour une même question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Les bons choix apportent des points, les mauvais en retirent. L'absence de choix ne retire ni n'apporte de point.

Pour indiquer vos choix, vous rédigerez : Question n°… $\longmapsto$ choix … et …

N°	Proposition faite	choix A	choix B	choix C	choix D
1	Les expressions suivantes sont définies sur $[-3\,;3[$.	$\ln(x)$	$\ln(9-x^2)$	$\ln(-x)$	$\ln(x^2-2x+4)$
2	Les égalités suivantes sont vraies	$\ln(e)=1$	$\ln(1)=e$	$\ln(\frac{1}{e})=-1$	$\dfrac{\ln(1)}{\ln(e)}=\ln(1-e)$
3	Si $f(x)=x\ln(x^2)$ alors $f'(x)$ s'écrit :	$\dfrac{2}{x}$	$2(\ln(x)+1)$	$\dfrac{1}{x}$	$2\ln(x)-2$
4	En 0, la limite de $\dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$ est :	0	$+\infty$	$-\infty$	1

Corrigé

Exercice 1 - Enseignement de spécialité

1. Selon la définition :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0+6}{5} = \frac{14+6}{5} = 4 \\ u_2 &= \frac{2u_1+6}{5} = \frac{8+6}{5} = 2,8 \\ u_3 &= \frac{2u_2+6}{5} = \frac{5,6+6}{5} = 2,32 \end{aligned}$$

2. Soit n un entier naturel quelconque. Exprimons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 && \text{selon la définition de la suite } (v_n) \\ &= \frac{2u_n+6}{5} - 2 && \text{selon la définition de } (u_n) \\ &= \frac{2u_n+6-10}{5} = \frac{2u_n-4}{5} \\ &= \frac{2(u_n-2)}{5} = \frac{2}{5}\,(u_n-2) \\ v_{n+1} &= \frac{2}{5}\,v_n && \text{selon la définition de } (v_n) \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$. Son terme initial est :

$$v_0 = u_0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Nous savons que l'expression explicite du terme de rang n d'une suite géométrique (a_n) de terme initial a_0 et de raison r est : $a_n = a_0\,r^n$.

On aura donc pour la suite (v_n) : $v_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

De la définition de (v_n) : $v_n = u_n - 2$,
on déduit : $u_n = v_n + 2$
et par conséquent :

$$u_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$$

Comme les suites géométriques dont la raison est comprise entre 0 et 1 convergent vers 0, (v_n) converge vers 0 et donc (u_n) converge vers 2.

3. La fonction f est une fonction affine. En effet :

$$f(x) = \frac{2x+6}{5} = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$$

Sa représentation graphique est donc une droite passant par les points :

$$A\left|\begin{matrix} 5 \\ 3,2 \end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad B\left|\begin{matrix} 0 \\ 1,2 \end{matrix}\right.$$

La droite Δ est la bissectrice du premier quadrant du repère.
La relation de récurrence définissant la suite (u_n) peut s'écrire :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Le point P_0 étant placé (figure 2) à l'abscisse u_0 sur $(O\,;\vec{i})$, on détermine le point A_0 de même abscisse, sur D. L'ordonnée de A_0 est évidement $f(u_0) = u_1$. Le point C_0 de même ordonnée que A_0 et appartenant à Δ a ses deux coordonnées égales ; son abscisse est donc u_1 et, par conséquent, le point de même abscisse que C_0 sur $(O\,;\vec{i})$ est P_1.
En reprenant la même démarche, à partir de P_1, on trouvera successivement les points P_2, P_3... Cette suite de points de l'axe $(O\,;\vec{i})$ est obtenue à partir du trajet :

$$P_0 \to A_0 \to C_0 \to A_1 \to C_1 \to A_2 \to C_2 \to A_3 \cdots$$

Cette ligne brisée est enfermée dans le secteur angulaire formé par les deux droites D et Δ. Il ne peut que se diriger vers leur point d'intersection. L'abscisse de ce point est donc la limite des abscisses des points P_n. C'est la limite de la suite (u_n).

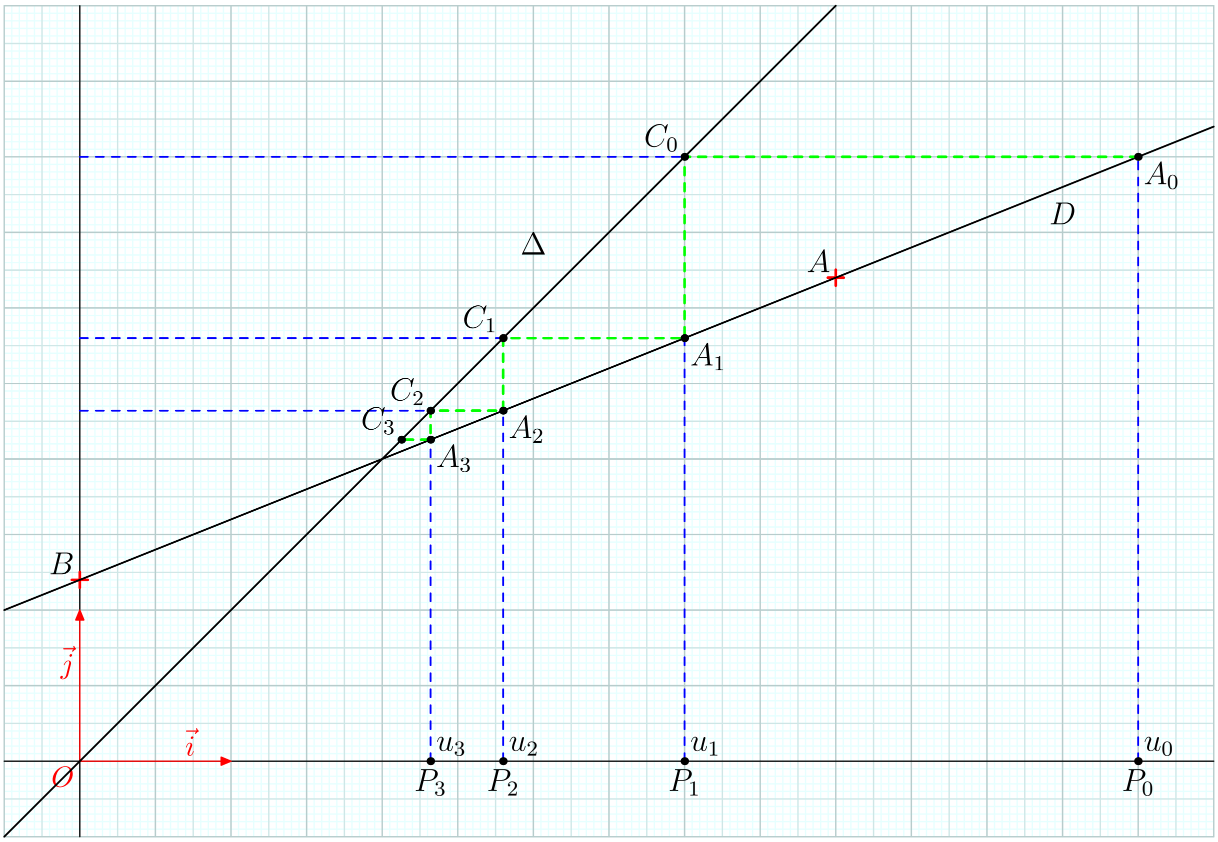

FIG. 2 – Exercice de spécialité

Exercice 1 - Non spécialistes

Question 1

Par hypothèse, Γ est la représentation de f, et $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \in \Gamma$. On en déduit que $f(1) = 2$. Le graphique confirme ce résultat. De même, il apparaît que $f(2) = 3$ puisque $B \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right. \in \Gamma$.

Par hypothèse, la tangente en A à la courbe Γ, représentative de f, est la droite (AE). Le coefficient directeur de cette droite est :

$$m = \frac{2-(-1)}{1-0} = 3$$

m est aussi le nombre dérivé de f en 1. On a donc : $f'(1) = 3$

Selon la figure, la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en deux points M_1 et M_2 d'abscisses respectives $0,5$ et 3. Les points de Γ situés (figure 3) entre M_1 et M_2 ont des ordonnées positives puisqu'ils sont au dessus de l'axe $(O\,;\vec{i})$. Leurs abscisses sont comprises entre $0,5$ et 3. L'inéquation $f(x) > 0$ semble donc avoir pour ensemble de solutions, l'intervalle $]0,5\,;3[$.

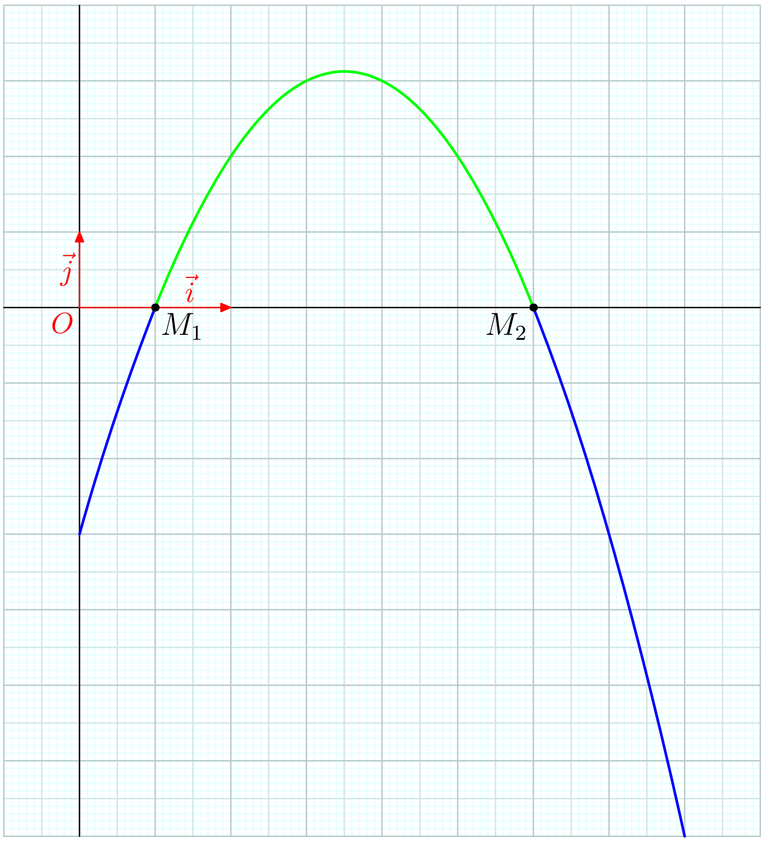

FIG. 3 – Exercice 1 - non spécialistes

Question 2

On a vu quans la question 1 que :

f(1)=2 f(2)=3 f'(1)=3

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2 && (1)\\ 4a+2b+c &= 3 && (2)\\ 2a+b &= 3 && (3) \end{aligned}$$

De (2) et (3) on déduit, par combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} (4a+2b+c)-2(2a+b) &= 3-2\times 3 \\ c &= -3 && (4) \end{aligned}$$

De même, de (2), (1) et (4), on déduit :

$$\begin{aligned} (4a+2b+c)-2(a+b+c)+c &= 3-2\times 2+(-3) \\ 2a &= -4 \\ a &= -2 && (5) \end{aligned}$$

Enfin, (3) et (5) permettent de déterminer b :

$$\begin{aligned} (2a+b)-2a &= 3-2\times(-2) \\ b &= -7 && (6) \end{aligned}$$

La fonction f, selon (3), (5) et (6) est donc définie par : $f(x) = -2x^2+7x-3$

Question 3

D'après la question 1, $f(x)$ est positif sur l'intervalle $]0,5\,;3[$. Sur cet intervalle, $g = \ln \circ f$ est donc bien définie. Les équation suivantes sont équivalentes :

$g(x) - 2\ln(3) = \ln(\frac{2}{9})$

$\ln(-2x^2+7x-3) = 2\ln(3) + \ln(\frac{2}{9})$ selon la définition de $g(x)$

$\ln(-2x^2+7x-3) = 2\ln(3) + \ln(2) - 2\ln(3)$ selon les propriétés de ln

$\ln(-2x^2+7x-3) = \ln(2)$

Comme la fonction ln est croissante et continue, cette dernière équation est équivalente à :

$$-2x^2+7x-3 = 2$$

et donc, à :

$$-2x^2+7x-5 = 0$$

Le polynôme $-2x^2+7x-5$ du second degré a pour discriminant 9 ; il admet donc, sur $\mathbb{R}$ deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2,5$.

Les équations précédentes ont donc pour ensemble de solution : $\mathcal{S} = \{1\,;2,5\}$.

De la même façon, résolvons l'équation : $g(x) = \ln(3 - x)$.

On a vu que $g(x)$ est défini sur $]0,5\,;3[$. Sur cet intervalle, $3 - x$ est positif et par conséquent $\ln(3 - x)$ est aussi défini.

L'équation proposée s'écrit : $\ln(-2x^2 + 7x - 3) = \ln(3 - x)$. Comme la fonction logarithme est continue et croissante, cette équation quivaut à :

$$-2x^2 + 7x - 3 = 3 - x$$

et par conséquent, à

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

Le polynôme du second degré $x^2 + 4x + 3$ a pour discriminant 4 ; il admet sur $\mathbb{R}$ deux racines $s_1 = -1$ et $s_2 = -3$.

Sur son ensemble de définition, l'équation $g(x) = \ln(3 - x)$ n'a donc aucune solution.

Exercice 2

Variations de g

g est définie et dérivable sur I. Sa fonction dérivée g' est définie par :

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

Sur l'ensemble des réels strictement positifs, les deux termes[1] de cette expression de $g'(x)$ sont positifs. g' est donc une fonction positive sur I. On en déduit que g est croissante sur I.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	

Résolution de l'équation $g(x) = 0$

On a : $g(1) = 1 - 2 - ln(1) = -1$ et $g(2) = 4 - 2 + ln(2) \approx 2,69$

[1] On peut aussi, comme on le fait le plus souvent, transformer cette somme en produit : $g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$. L'étude du signe de $g'(x)$ est alors plus traditionnelle, mais aussi plus longue à mener.

Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la fonction g donne donc une image négative (celle de 1) et une image positive (celle de 2). Comme g est continue sur l'intervalle $[1\,;2]$, elle atteindra sur cet intervalle toutes les valeurs intermédiaires à ces deux images. En particulier, elle atteindra 0. Il existe donc bien un réel (au moins) α appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Comme la fonction g est strictement croissante, deux réels distincts de $[1\,;2]$ ne peuvent avoir la même image. Sur l'intervalle $[1\,;2]$, il existe donc **un seul** réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

Comme la fonction g est croissante sur I, et pas seulement sur $[1\,;2]$, deux réels distincts de I ont des images distinctes. Le réel α est donc bien le seul réel de I à avoir pour image 0.

La calculette nous indique : $g(1,31) \approx -0,14$ et $g(1,32) \approx 0,2$.

Du fait de la croissance de g :

— $\alpha \leqslant 1,31$ n'est pas possible car cela entraînerait $g(\alpha) \leqslant g(1,31)$ et donc $0 \leqslant -0,14$! !

— $\alpha \geqslant 1,32$ n'est pas possible car cela entraînerait $g(\alpha) \geqslant g(1,32)$ et donc $0 \geqslant 0,2$! !

On a donc : $1,31 \leqslant \alpha \leqslant 1,32$

Signe de $g(x)$

Comme g est croissante sur I, tout réel supérieur à α a une image supérieure à $g(\alpha)$:

$$\text{Si } x > \alpha \text{ alors } g(x) > g(\alpha) \text{ et donc } g(x) > 0$$

Pour la même raison :

$$\text{Si } x < \alpha \text{ alors } g(x) < g(\alpha) \text{ et donc } g(x) < 0$$

d'où le tableau :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Variations de f

f est définie sur $]0\,;+\infty[$, et l'on a :

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln(x)}{x} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x}$$

Si l'on définit sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions u et v par :

$$u(x) = x^2 + 1 - \ln(x) \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

alors, u et v sont dérivables, de dérivées :

$$u'(x) = 2x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

Comme $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. On a donc :

$$f'(x) = \frac{[2x - \frac{1}{x}]x - [x^2 + 1 - \ln(x)]}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 2 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Le dénominateur de cette expression est positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, étudié dans la question précédente.

On a donc :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{1 - \ln(\alpha)}{\alpha}$$

$$f(\alpha) \approx 1,31 + \frac{1 - ln(1,31)}{1,31}$$

$$f(\alpha) \approx 1,86$$

Limite aux bornes

Au voisinage de l'infini, on peut écrire :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, selon les théorèmes sur la limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Au voisinage de 0 (à droite), on peut écrire :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}(1 - \ln(x))$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \\ \text{donc} \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - \ln(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc : } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1 - \ln(x)}{x} = +\infty \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'autre part : } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \end{array}\right\} \text{donc : } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

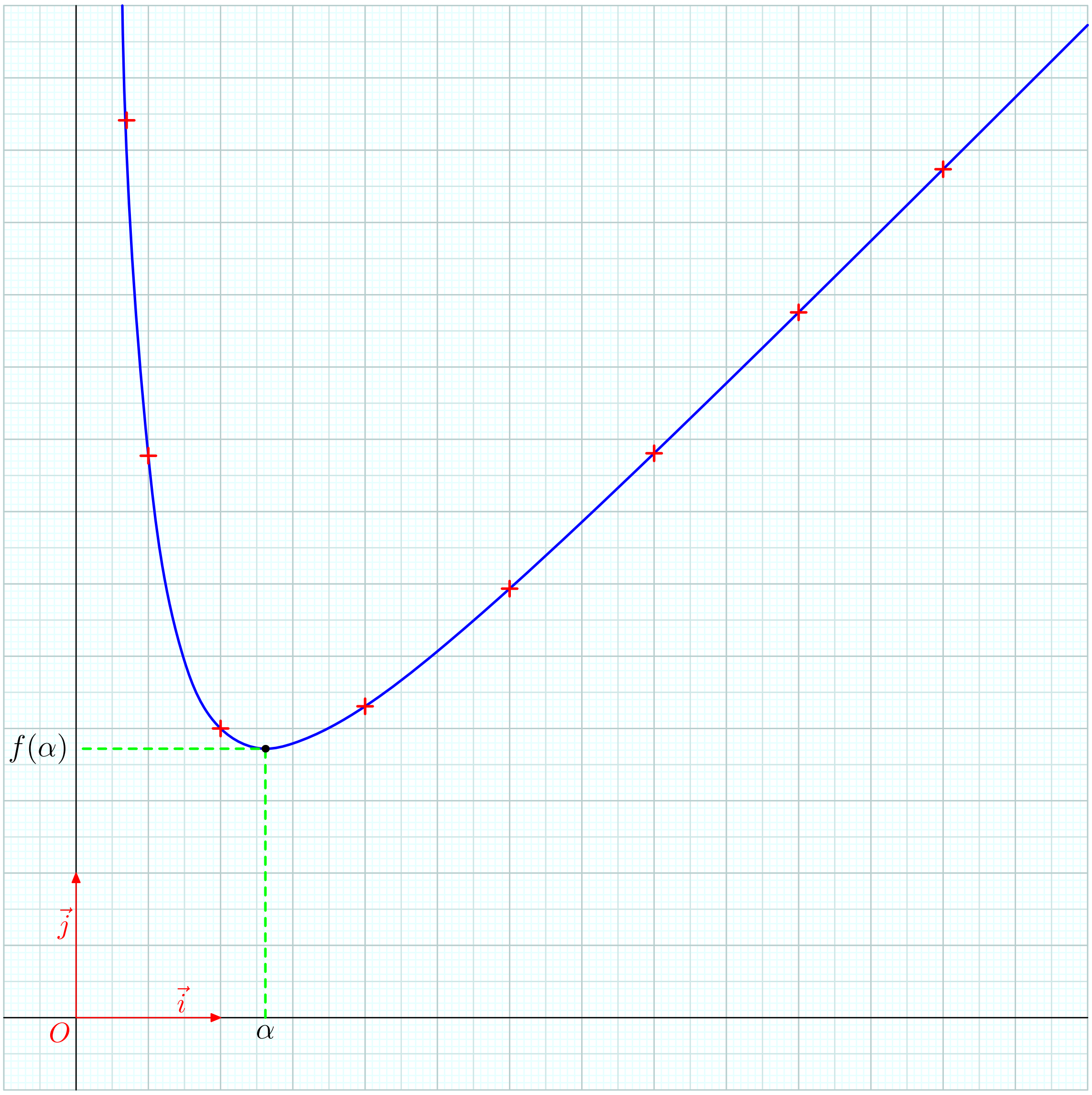

Fig. 4 – Exercice 2

Exercice 3

Asymptotes

Les courbes C et C' représentent les fonctions f et g définies respectivement sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln(2x+1) - \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(2)$$

Pour tout réel x positif, la différence $f(x) - g(x)$ est la différence entre les ordonnées de deux points M et N de même abscisse x, l'un étant sur C (M) et l'autre (N) appartenant à C'.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= [x + \ln(2x+1) - \ln(x)] - [x + \ln(2)] \\ &= \ln(2x+1) - \ln(x) - \ln(2) \\ &= \ln \frac{2x+1}{2x} = \ln \frac{x(2+\frac{1}{x})}{2x} \\ &= \ln \frac{2+\frac{1}{x}}{2} \end{aligned}$$

Calculons la limite de cette différence à l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{2} = 1$$

Comme la fonction ln est continue, on a par ailleurs : $\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$.
Les propriétés de la limite d'une fonction composée nous permettent de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$$

La différence des ordonnées de M et de N tendant vers 0 lorsque leur abscisse commune tend vers l'infini, les courbes C et C' sont asymptotes à l'infini.

Positions relatives

Si la différence $f(x) - g(x)$ est positive, cela exprime que le point M est situé au dessus du point N. Si la différence est au contraire négative cela signifie que, pour l'abscisse x, N est situé au dessus de M.
L'inéquation $\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) > 0$, sur $]0\,;+\infty[$, est équivalente à l'inéquation :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) > \ln(1)$$

et comme la fonction logarithme est croissante, cette dernière est équivalente à :

$$\frac{2x+1}{2x} > 1$$

En multipliant les deux membres par $2x$ (positif) on obtient encore une inéquation équivalente :

$$2x + 1 > 2x$$

Cette inéquation admet tous les réels de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ pour solutions (elle est équivalente à $0x + 1 > 0$). La différence $f(x) - g(x)$ est donc positive sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve que C est entièrement située au dessus de C'.

Exercice 4

Question n° 1 → choix D.
Question n° 2 → choix A et choix C.
Question n° 3 → choix B.
Question n° 1 → choix C.