T ES 3 **Devoir sur table de mathématiques** **Mardi 28 janvier 2003**

Tronc commun ***Durée : 3 heures***

Exercice 1 : (5 points)

Dans son troupeau, un berger possède deux races de brebis, A et B. La race A est représentée dans la proportion de 40%. Une étude sur la fécondité des races A et B a montré qu'en moyenne:

- 67,5% des brebis A ont un agneau;
- 30 % des brebis A ont deux agneaux;
- 2,5% des brebis A sont stériles;
- 55% des brebis B ont un agneau;
- 40 % des brebis B ont deux agneaux;
- 5% des brebis B sont stériles.

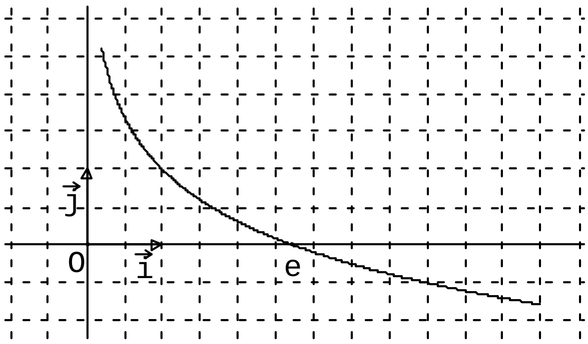
On suppose que le nombre de brebis du troupeau est suffisamment grand pour que le fait de prélever une brebis ne change pas la proportion des brebis A et B.

1. On choisit une brebis au hasard. Montrer que la probabilité pour qu'elle soit stérile est 0,04

2. A chaque brebis du troupeau, on associe le nombre X d'agneaux qu'elle produit.
   a) Déterminer la loi de probabilité correspondante..
   b) Calculer l'espérance mathématique E(X).
   c) Si le troupeau comprend 1 000 brebis, combien d'agneaux peut espérer le berger ?

3. Un acheteur choisit 3 brebis au hasard.
   On donnera les résultats suivants à 10^{-4} près.
   a) Quelle est la probabilité pour que, sur ces 3 brebis, 2 exactement soient stériles ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'aucune ne soit stérile ?

Exercice 2 (5 points)



Le repère utilisé est orthonormal : unité : 1 cm.
La figure ci-contre est la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.

1. a. Démontrer par le calcul que f est monotone sur $]0;+\infty[$
   b. En déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$.
2. L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est une primitive de f. Justifier que l'une des courbes ne peut convenir.

Figure 1 :

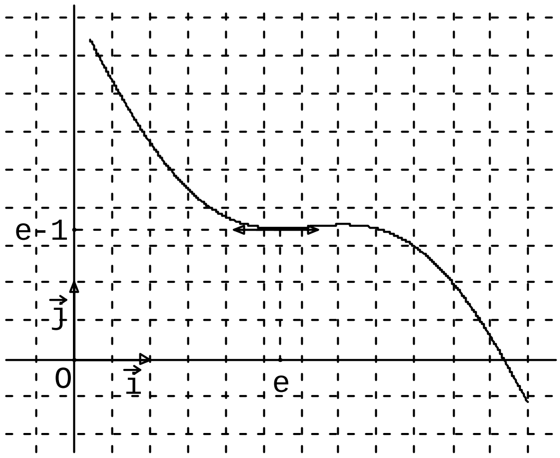
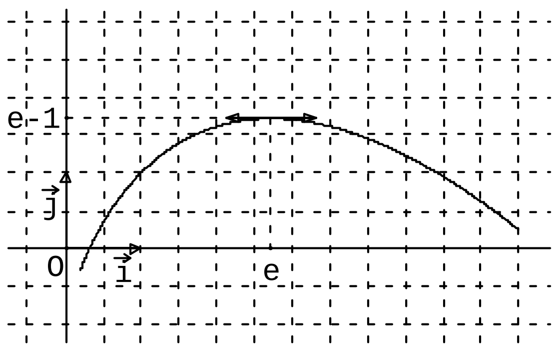


Figure 2 :



3. La bonne fonction est appelée g. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = ax\ln x + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
   a. Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.
   b. En déduire les valeurs de a et de b.
4. Sur le graphique, on observe que $g(e) = e - 1$. En déduire la valeur de c.

PROBLEME (10 points)

Partie I : Étude d'une fonction *f*

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3,2 - 8\ln x$

1. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0.
   On peut écrire $f(x) = x^2\left(1 - \frac{3,2}{x^2} - \frac{8\ln x}{x^2}\right)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Étudier les variations de la fonction *f* sur $]0,+\infty[$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans [3, 4], puis déterminer une valeur approchée par excès de α à 10^{-1} près.
   Dans la suite du problème, on utilisera cette valeur dans les calculs.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur [1, 6].

Partie II : Une application économique

Une entreprise fabrique un solvant pour peinture. x désigne le nombre de m^3 de solvant produit chaque jour ; $x \in [1, 6]$. Le coût total de production de ces x mètres cubes, en milliers d'euros est : $C_t(x) = \frac{x^2}{4} + 2,8 + 2\ln x$.

On cherche à déterminer le prix de vente pour que l'entreprise fasse des bénéfices.

A. Étude de la fonction coût total C_t :

1. Étudier les variations de C_t sur [1, 6].
2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$C_t(x)$ à 10^{-1} près											

   b. Tracer dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique (C) de la fonction C_t
   (unités : 2cm pour 1 m^3 et 1cm pour 1 millier d'euros)

B. Étude de la fonction coût moyen C_m :

Pour une production journalière de x mètres cubes, le coût moyen de production en milliers d'euros de 1 m^3 est :

$C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x}$

1. Montrer que $C_m(x) = \frac{x^2 + 11,2 + 8\ln x}{4x}$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de [1, 6], $C_m'(x) = \frac{f(x)}{4x^2}$. (*f* étant la fonction définie dans la partie I).
3. a. Étudier les variations de la fonction C_m sur [1, 6].
   b. Quel est le coût minimum de production de 1m^3 de solvant ? Pour quelle production ?
   c. Comment faut-il choisir le prix de vente de 1m^3 de solvant pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices ?
