Classe : TES1 Le 28/01/2003

MATHEMATIQUES

Devoir N°5

Calculatrice et formulaire autorisés Durée : 3h

Exercice 1 : (5 *points*) (correction)

Un client désirant louer une voiture auprès de la société Alizé doit formuler sa demande en précisant deux critères :

- la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;
- l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.

On note C l'événement : « la voiture est climatisée ».

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

2. Dans cette question, on donnera les résultats numériques exacts.

On choisit au hasard un client et on définit les événements suivants :

- « le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »,
- « le client a choisi une voiture climatisée ».

a) Déterminer la probabilité de ces événements.

b) Quelle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?

3. On suppose que le nombre des clients est suffisamment important pour que la probabilité de choisir une voiture climatisée de catégorie A soit, pour chacun d'eux, celle obtenue à la question **2.** et que leurs choix sont indépendants les uns des autres. On choisit au hasard trois clients.

Soit X le nombre de voitures de catégorie A climatisées louées par ces trois clients.

a) Montrer que la probabilité de l'événement [X = 3] est $(0,12)^3$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement [X = 0] et en donner l'arrondi à deux décimales.

c) Déterminer la probabilité de l'événement : « Au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » et en donner l'arrondi à deux décimales.

Exercice 2 : (4 *points*) (correction)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = x - 2$

2. Donner l'ensemble de définition de l'équation :

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$$

3. En utilisant les deux questions précédentes, résoudre l'équation :

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$$

Problème : (11 *points*)

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

PARTIE A (correction)

On introduit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).

2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

PARTIE B : Etude de la fonction f (correction)

1. Calculer $f(1)$, et montrer que $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

En déduire le sens de variation de f.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à $]3\,;4[$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

6. Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2x}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \dfrac{1}{2}x]$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

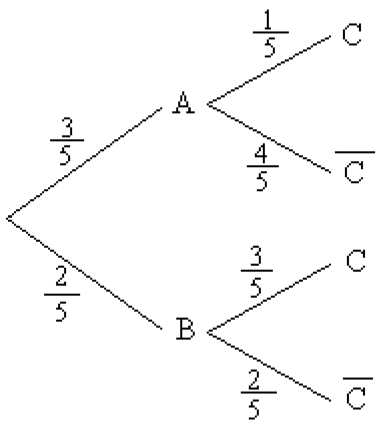
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

8. Tracer $\mathcal{C}$, (T) et les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

<u>Correction du devoir 5</u>

<u>Exercice 1 :</u> (retour à l'énoncé)

1.



2. « le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée » : $A\cap C$
« le client a choisi une voiture climatisée » : C

a) $P(A\cap C) = P_A(C) \times P(A) = \dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$.

$P(C) = P(A\cap C) + P(B\cap C)$

où $P(B\cap C) = P_B(C) \times P(B) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$ et $P(C) = \dfrac{3}{25} + \dfrac{6}{25} = \dfrac{9}{25}$

b) On cherche $P_C(A)$:

$$P_C(A) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{3}{25}\times\frac{25}{9} = \frac{1}{3}$$

3. a) L'événement [X = 3] signifie que les trois voitures ne sont pas de catégorie A et climatisées. On a alors $P([X = 3]) = (P(A\cap C))^3 = (0{,}12)^3$.

b) [X = 0] signifie que les trois voitures ne sont pas de catégorie A avec climatisation.

$P([X = 0]) = (P(\overline{A\cap C}))^3$ et $P(\overline{A\cap C}) = 1 - P(A\cap C) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

$= (0{,}88)^3 \approx 0{,}68$

c) L'événement « au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » est l'événement contraire de [X = 0]. La probabilité cherchée est alors : $1 - P([X = 0]) \approx 1 - 0{,}68$
$\approx 0{,}32$.

Exercice 2 : (retour à l'énoncé)

1. $x^2 - 2x - 3 = x - 2$ signifie $x^2 - 3x - 1 = 0$

on détermine le discriminant de $x^2 - 3x - 1$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 9 + 4 = 13$.

Les racines du polynôme sont alors : $\dfrac{-(-3) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-(-3) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

2. L'équation est définie lorsque $x^2 - 2x - 3 > 0$ et $x - 2 > 0$.

- Recherche des racines de $x^2 - 2x - 3$:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$

Les racines de $x^2 - 2x - 3$ sont alors : $x_1 = \dfrac{-(-2) - 4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + 4}{2} = 3$

Donc $x^2 - 2x - 3 > 0$ sur $]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$

- $x - 2 > 0$ signifie $x > 2$ et $x - 2 > 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

L'équation est alors définie sur $]3 ; +\infty[$.

3. Sur $]3 ; +\infty[$ l'équation $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$

est équivalente à $x^2 - 2x - 3 = x - 2$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont : $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

or $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} \in]3 ; +\infty[$ et $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} \notin]3 ; +\infty[$.

Donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$ est $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Problème :

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

PARTIE A (retour à l'énoncé)

g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$.

1. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

$g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x}$

or $x > 0$ sur $]0 ; +\infty[$

Signe de $2x^2 - 2$:

$2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1)$

Les racines de $2x^2 - 2$ sont 1 et -1 ; donc $2x^2 - 2 > 0$ sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

et $g'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$; $g'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$.

g est alors strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$

et est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

2. La fonction g admet alors un minimum sur $]0 ; +\infty[$ en 1.

$g(1) = 1^2 + 3 - 2 \ln 1 = 1 + 3 = 4$.

$g(1) > 0$ donc $g(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

PARTIE B (retour à l'énoncé)

1. $f(1) = \dfrac{\ln 1}{1} + \dfrac{1^2 - 1}{2 \times 1} = 0$

$f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}} = \dfrac{2}{2\mathrm{e}} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 1 = -1$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} + \dfrac{w(x)}{t(x)}$ où $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} + \dfrac{w't - t'w}{t^2}$

$v(x) = x$; $v'(x) = 1$

$w(x) = x^2 - 1$; $w'(x) = 2x$

$t(x) = 2x$; $t'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} + \frac{2x \times 2x - 2 \times (x^2 - 1)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{2x^2} + \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ $2x^2 > 0$;

$f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$, c'est à dire $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5. f est continue sur $]0 ; +\infty[$

f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

L'équation $f(x) = 2$ admet alors une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$

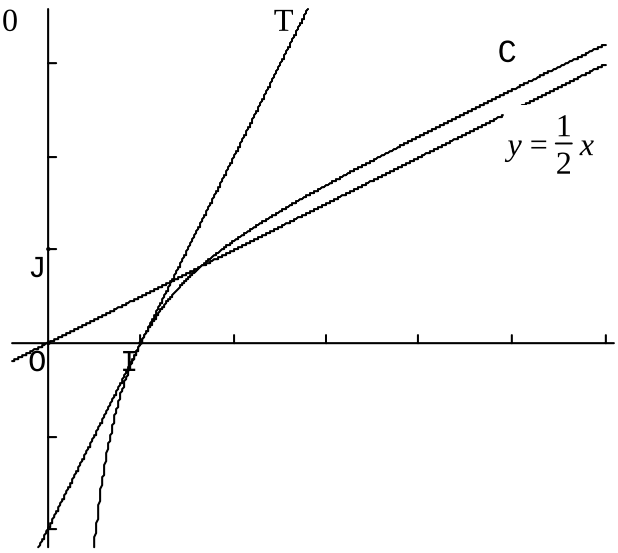
$f(3) \approx 1{,}7$; $f(4) \approx 2{,}22$ $2 \in]f(3) ; f(4)[$ donc $\alpha \in]3 ; 4[$.

De plus $f(3{,}56) \approx 1{,}996$ et $f(3{,}57) \approx 2{,}001$ donc $\alpha \approx 3{,}57$.

6. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x} - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1 - x^2}{2x} = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{2x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{1}{2}x = 0$

La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est alors asymptote à C en $+\infty$.



7. Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

où $f'(1) = \dfrac{g(1)}{2 \times 1^2}$ où $g(1) = 4$ alors $f'(1) = \dfrac{4}{2} = 2$

de plus $f(1) = 0$ d'après la question **1.**

Une équation de (T) est alors : $y = 2(x - 1)$

$y = 2x - 2$