Classe : TES1 Le 05/03/2004

MATHEMATIQUES

Devoir N°4

Calculatrice autorisée Durée : 3h

Exercice 1: (4 *points*)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

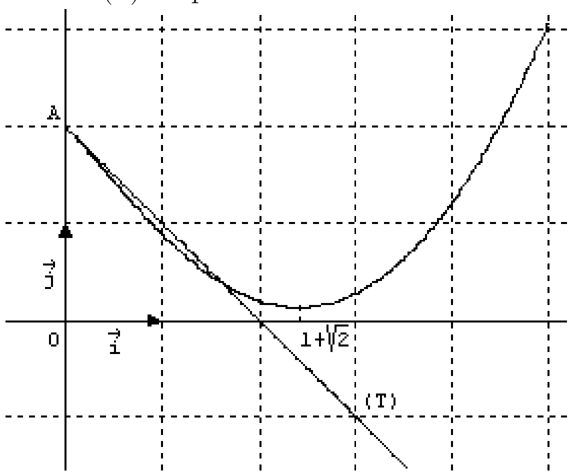
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Répondre par VRAI ou FAUX. Les réponses devront être justifiées, éventuellement par des graphiques.

1. Pour tout réel x de $]0;1]$, $f(x) \leq 1$.
2. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;1[$.
3. L'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution dans $]1;+\infty[$.
4. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2: (4 *points*)

La courbe $(\mathcal{C})$, donnée ci-après, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0;5]$.
Le point A a pour coordonnées $(0;2)$.
La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.



1. Préciser $h(0)$.
   Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).
2. La fonction h, définie sur $[0;5]$ est de la forme : $h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$
   où a, b et c sont des nombres réels.
   On note h' la dérivée de la fonction h.
   Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.
3. On note $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.
   En utilisant ce résultat et les résultats de la question 1., déterminer chacune des valeurs a, b et c.
4. En utilisant la représentation graphique de la fonction h, donner, en justifiant, le signe de $h'(x)$.
5. Soit g la fonction définie sur $[0;5]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{h(x)}$.
   Déterminer le sens de variation de la fonction g.

Exercice 3: (5 *points*)
Les membres d'un club sportif se présentent à l'accueil soit pour jouer au golf, soit pour profiter de la salle de musculation (une activité excluant l'autre).
La probabilité qu'il ne pleuve pas, en automne, dans cette région est égale à 0,8.
En automne, un membre se présente.
S'il pleut, il joue au golf dans 30% des cas.
S'il ne pleut pas, il s'enferme dans la salle de musculation dans 20% des cas.
On note B l'événement « il pleut ».
G l'événement « le membre du club joue au golf ».

1. (a) Traduire la situation ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à 0,7.
   (c) Déterminer la probabilité qu'il pleuve sachant que le membre du club se présentant à l'accueil ne joue pas au golf.
2. Trois membres se présentent successivement et indépendamment les uns des autres.
   On suppose que, pour chacun des trois, la probabilité qu'il joue au golf est 0,7.
   On s'intéresse au nombre de golfeurs parmi ces trois personnes.
   (a) En utilisant un arbre pondéré, montrer que la probabilité p_2 que deux membres exactement jouent au golf est de 0,441.
   (b) Etablir la loi de probabilité associée à cette situation.
   (c) Déterminer l'espérance mathématique et interpréter le résultat obtenu.
   (d) Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois membres ne joue pas au golf.

Exercice 4: (7 *points*)
PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. (a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   (b) Calculer $g(1)$.
2. (a) Déduire du 1. les résultats suivants :
   si $x \geq 1$, alors $x^2 + \ln x \geq 1$;
   si $0 < x \leq 1$, alors $x^2 + \ln x \leq 1$.
   (b) Déterminer le signe de l'expression $x^2 + \ln x - 1$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Etude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ et on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$).
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$.
3. En utilisant la partie **A.**, donner le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
4. (a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
5. Déterminer les coordonnées du point J de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente T est parallèle à la droite Δ.
6. Soit K la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $K(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
   (a) Calculer $K'(x)$.
   (b) En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f.
7. Tracer Δ, T et $\mathcal{C}$.

Correction du DST4

Exercice 1:

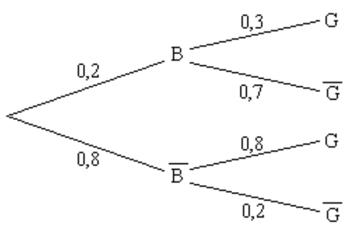
1. D'après le tableau de variation de f, f est strictement croissante sur $]0;1]$ et $f(1)=1$.
   Donc $f(x) \leq 1$ pour $x \in]0;1]$. Donc VRAI.
2. Sur $]0;1]$, f est continue et strictement croissante
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad$ et $\quad f(1)=1$
   donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;1[$. Donc VRAI.
3. Comme f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, et $f(1)=1$, on peut dire que l'équation $f(x)=3$ n'admet pas de solution sur $]1;+\infty[$. Donc FAUX.
4. Au point d'abscisse 1, la tangente à $\mathcal{C}$ est horizontale car $f'(1)=0$.
   Donc cette tangente n'est pas parallèle à la droite d'équation $y=x$. Donc FAUX.

Exercice 2:

1. $h(0)=2$
   $h'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, c'est à dire de (T).
   Le coefficient directeur de (T) est -1, donc $h'(0)=-1$.
2. $h(x) = ax^2+bx+c+2\ln(x+1)$
   $h'(x) = 2ax+b+\dfrac{2}{x+1}$
3. $h'(3)=\dfrac{1}{2}$, et d'après la question 1., on a :
   $$\begin{cases} h(0)=2 \\ h'(0)=-1 \\ h'(3)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} h(0) &= a\times 0^2+b\times 0+c+2\ln(0+1)=c \\ h'(0) &= 2\times a\times 0+b+\frac{2}{0+1}=b+2 \\ h'(3) &= 2a\times 3+b+\frac{2}{3+1}=6a+b+\frac{1}{2} \end{aligned}$$
   On obtient alors : $\begin{cases} c=2 \\ b+2=-1 \\ 6a+b+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ d'où $b=-3$ et $6a-3=0$, ce qui donne $a=\dfrac{1}{2}$
   Donc $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+2+2\ln(x+1)$.
4. h est strictement décroissante sur $[0;1+\sqrt{2}[$ et strictement croissante sur $]1+\sqrt{2};6]$, alors :
   $h'(x)<0$ sur $[0;1+\sqrt{2}[$ et $h'(x)>0$ sur $]1+\sqrt{2};6]$
5. g est la fonction définie sur $[0;6]$ par : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
   g est bien définie sur $[0;6]$ car $h(x)>0$ sur cet intervalle
   et $g'(x) = -\dfrac{h'(x)}{(h(x))^2}$ or $(h(x))^2>0$ sur $[0;6]$, donc $g'(x)$ est du signe contraire de celui de $h'(x)$.
   On a alors $g'(x)>0$ sur $[0;1+\sqrt{2}[$ et $g'(x)<0$ sur $]1+\sqrt{2};6]$
   donc g est strictement croissante sur $[0;1+\sqrt{2}[$ et strictement décroissante sur $]1+\sqrt{2};6]$.

Exercice 3:

1. (a) On a $P(B)=0,2 \quad P(\overline{B})=0,8 \quad P_B(G)=0,3 \quad P_B(\overline{G})=0,7 \quad P_{\overline{B}}(G)=0,8 \quad P_{\overline{B}}(\overline{G})=0,2$
   arbre pondéré :



(b) $P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap \overline{B})$ d'après la formule des probabilités totales
$= P_B(G) \times P(B) + P_{\overline{B}}(G) \times P(\overline{B}) = 0,3 \times 0,2 + 0,8 \times 0,8 = 0,06 + 0,64 = 0,7$

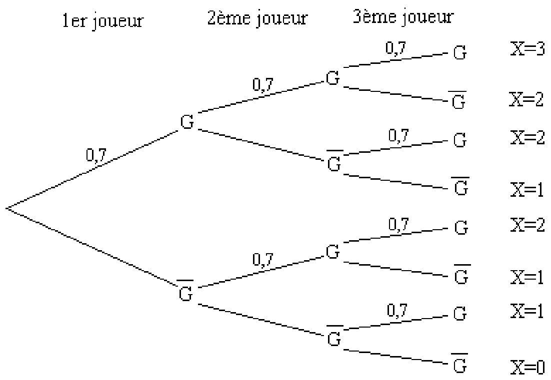
(c) On cherche $p_{\overline{G}}(B)$

$P_{\overline{G}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{G})}{P(\overline{G})}$ et $P(B \cap \overline{G}) = P_B(\overline{G}) \times P(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$

$P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,7 = 0,3$

$P_{\overline{G}}(B) = \dfrac{0,14}{0,3} \simeq 0,47$

2. (a) On note X le nombre de golfeurs.



On est en présence d'un schéma de Bernoulli, X suit alors la loi binômiale $\mathcal{B}(3; 0,7)$.
On cherche $p_2 = P(X = 2)$
$P(X = 2) = P(G) \times P(G) \times P(\overline{G}) + P(G) \times P(\overline{G}) \times P(G) + P(\overline{G}) \times P(G) \times P(G)$
$P(X = 2) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2 = 0,441$ donc $p_2 = 0,441$.

(b) $P(X = 0) = (P(\overline{G}))^3 = 0,3^3 = 0,027$
$P(X = 1) = 3 \times 0,7 \times 0,3^2 = 0,189$
$P(X = 3) = (P(G))^3 = 0,7^3 = 0,343$

Loi de X :

X	0	1	2	3
probabilité	0,027	0,189	0,441	0,343

(c) $E(X) = 0 \times 0,027 + 1 \times 0,189 + 2 \times 0,441 + 3 \times 0,343 = 2,1$
En moyenne, il y a 2,1 golfeurs parmi les 3 personnes.

(d) On cherche $P(X \geq 1)$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,973$

Exercice 4:

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. (a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$
or sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $2x^2 + 1 > 0$, donc $g'(x) > 0$, alors g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) $g(1) = 1^2 + \ln 1 = 1$

2. (a) Comme g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(1) = 1$
on a alors $g(x) \geq 1$ pour $x \geq 1$, c'est à dire $x^2 + \ln x \geq 1$ pour $x \geq 1$
et $g(x) \leq 1$ pour $0 < x \leq 1$, c'est à dire $x^2 + \ln x \leq 1$ pour $0 < x \leq 1$

(b) On obtient alors $x^2 + \ln x - 1 \geq 0$ pour $x \geq 1$ et $x^2 + \ln x - 1 \leq 0$ pour $0 < x \leq 1$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

   donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$

   $f(x) = x + 1 - \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $v(x) = x$; $v'(x) = 1$

   $f' = 1 - \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$

3. or $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + \ln x - 1$

   c'est à dire $x^2 + \ln x - 1 > 0$ sur $]1;+\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0;1[$

   Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

   $f(1) = 1 + 1 - \dfrac{\ln 1}{1} = 2$

4. (a) $f(x) - (x+1) = -\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

   donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   $x > 0$ sur $]0;+\infty[$ et $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$, alors $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$ sur $]1;+\infty[$

   $\ln x < 0$ sur $]0;1[$, alors $-\dfrac{\ln x}{x} > 0$ sur $]0;1[$

   donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $]0;1[$ et en-dessous sur $]1;+\infty[$.

5. On veut que la tangente T soit parallèle à Δ, donc T a pour coefficient directeur 1.

   On cherche alors x tel que $f'(x) = 1$, ce qui donne $\dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} = 1$ d'où $x^2 + \ln x - 1 = x^2$

   et on obtient $\ln x = 1$ donc $x = e$. Alors le point I a pour abscisse e

   $f(e) = e + 1 - \dfrac{\ln e}{e} = e + 1 - \dfrac{1}{e}$. Donc les coordonnées de I sont $\left(e; e + 1 - \dfrac{1}{e}\right)$.

6. Soit K la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $K(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

   (a) $K(x) = \dfrac{1}{2}(u(x))^2$ où $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $K' = \dfrac{1}{2} \times 2 \times u' \times u$ d'où $K'(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{\ln x}{x}$

   (b) Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est alors : $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - K(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$