TES *dm n°7 février -mars 2004*

<u>Exercice 1:</u>

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :
- si le joueur obtient un « six », il gagne 10 euros ; - s'il obtient un « un », un « deux », ou un « trois », il ne gagne rien et le jeu s'arrête ; - s'il obtient un « quatre », ou un « cinq », le joueur lance le dé une deuxième fois ; - s'il obtient un « six », il gagne alors 5 euros, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête. Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 2 euros. Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise ; un « gain » peut donc être négatif.
Soit G la variable aléatoire qui, à chaque partie effectuée par un joueur donné, associe son gain.

1. Quelles sont les valeurs prises par G ?

2. *Premier cas* : le joueur joue avec un dé bien équilibré.

a) Montrer que $p(G = 3) = \dfrac{1}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

b) Déterminer la loi de probabilité de G, puis l'espérance mathématique de G. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?

3. *Deuxième cas* : le joueur joue avec un dé pipé. On note p_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \le i \le 6$. On sait que p_6 est le double de p_1 et que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

a) Déterminer les valeurs de p_i pour $1 \le i \le 6$.

b) Montrer alors que $p(G = 3) = \dfrac{4}{49}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de G.

<u>Exercice 2:</u>

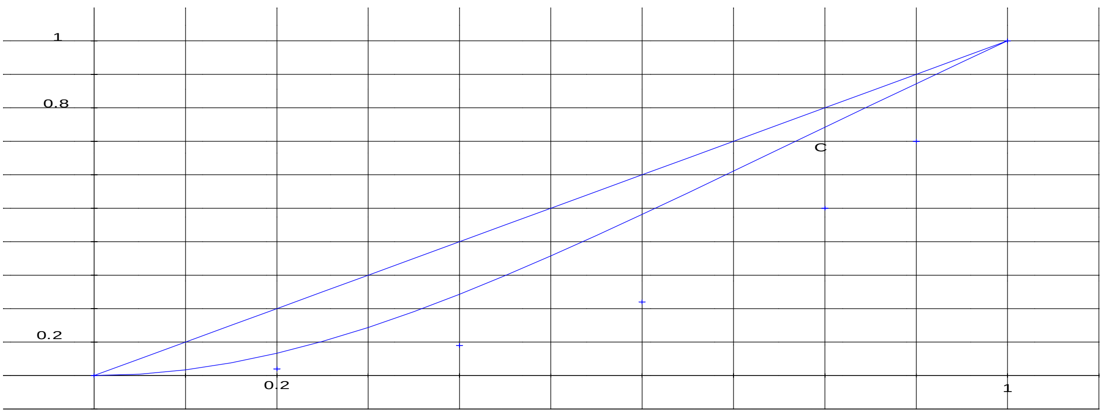
A. Soit h la fonction définie sur [0;1] par $h(x) = (e-1)x^2 - 2(e-1)x + 1$,
où e est tel que $\ln(e) = 1$. Montrer que h est strictement décroissante sur [0;1]

1. Justifier le fait que h s'annule une fois et une seule entre 0 et 1. On note α tel que $h(\alpha) = 0$.
2. En utilisant les résultats précédents, préciser le signe de $h(x)$ sur [0;1]

B. Soit f la fonction définie sur [0;1] par $f(x) = \ln[(e-1)x^2+1]$ de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal d'unité 10 cm.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Etudier les variations de f sur [0;1]
3. On veut préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$. Pour cela, on utilise la fonction d définie par $d(x) = x - f(x)$.
   a) Montrer que $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(e-1)x^2+1}$.
   b) Etudier le sens de variation de d sur [0;1]
   c) Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
   d) En déduire le signe de $d(x)$ sur [0;1] et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.

C. Sur le graphique ci-dessous sont représentées D, $\mathcal{C}$ et la courbe Γ d'une fonction g.



les courbes représentant *f* et *g* illustrent ici respectivement la répartition des salaires dans deux entreprises A et B. En abscisse, *x* représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des personnes ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de chaque entreprise; par exemple si l'on veut considérer les 60 % les moins bien payés , on choisira x = 0.6. En ordonnées, *f*(x) ou *g*(x) représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale totale affectée aux t % les moins bien payés des salariés de chaque entreprise, avec $x = \frac{t}{100}$. Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont des courbes de Lorenz.

1. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin) pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage de la masse salariale affectée aux 60 % des salariés les moins bine payés.
2. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin) pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage des salariés les moins bien payés dont la masse des alaires représente 60 % de la masse salariale totale.
3. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

Exercice 3:

On donne ci-dessous la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur [1;+∞[

La courbe Γ passe par les points I(1;0), A(2,e) et B(3;2). La droite T est tangente à Γ au point A et elle est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T' est tangente à Γ en B et elle passe par le point de coordonnées (5; 0). La fonction f est décroissante sur [2; +∞[. L'axe des abscisses est asymptote à Γ

1. A l'aide d'une lecture graphique :
   a) Donner les valeurs de f(1), f(2), f(3) puis de f '(2), f '(3).
   b) Déterminer une équation de la droite T'
   c) Donner la limite de f en + ∞ .
   d) Dresser le tableau de variations de f, donner le signe de f sur [1; +∞[
2. Soit la fonction g définie par g(x) = ln(f(x)) sur]1; +∞[
   a) Donner les valeurs de g(2), g(3) puis de g'(2) et g'(3)
   b) Déterminer les limites de g en 1 et en +∞.
   c) Dresser le tableau de variations de g, en le justifiant, sur]1; +∞[
   d) En utilisant la courbe Γ de la fonction f, donner une valeur approchée des solutions de l'équation g(x) = 0.