EXERCICE 1 :

1°) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 2) = \ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \ldots\ldots\ldots$

b) $x^2\left(1 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x^2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = \ldots \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{x^2} = \ldots \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} = \ldots \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x^2}\right) = \ldots\ldots\ldots$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

c) Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots$, alors la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de 0 d'équation : …

2°) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{x}$

x	0 1 $+\infty$
$2x^2 - 2$	
x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

signe de $2x^2 - 2$:

$\Delta = \ldots\ldots\ldots$

$x_1 = \ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2 - 2$	

3°) Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, f est ………………. et ………………………, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots$ et $f(1) = \ldots.$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\ ;\ 1[$.

$f(0{,}3) \approx \ldots\ldots$ et $f(0{,}4) \approx \ldots\ldots$ donc $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$; $f(\ldots..) \approx \ldots\ldots$ et $f(\ldots..) \approx \ldots\ldots$ donc $\ldots.. < \alpha < \ldots..$

Sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty]$, f est ………………. et ……………………, $f(1) = \ldots.$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]1\ ;\ +\infty[$.

$f(1{,}7) \approx \ldots\ldots$ et $f(1{,}8) \approx \ldots\ldots$ donc $1{,}7 < \beta < 1{,}8$; $f(\ldots..) \approx \ldots\ldots$ et $f(\ldots..) \approx \ldots\ldots$ donc $\ldots.. < \beta < \ldots..$

4°)

x	0 α β $+\infty$
$f(x)$	

EXERCICE 2 : (pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

1°) $f(\mathrm{e}) = \ldots\ldots\ldots$ $f'(\mathrm{e}) = \ldots\ldots\ldots$

L'équation de la tangente à (C_f) passant par le point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$

donc y = …………………

L'origine est le point d'abscisse (0 ; 0) donc : ………………………………………..

2°) signe de $x^2 - 2x - 3$:

$\Delta = \ldots\ldots\ldots$

$x_1 = \ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots$

x	$-\infty$ $+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	

signe de $A(x)$:

x	0 1 3 $+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	
$\ln x$	
$A(x)$	

3°) a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $\lim\limits_{x \to 1} 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to 1} -\dfrac{1}{x-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Donc la droite d'équation (d) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) On étudie le signe $f(x) - (2x + 1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$:

x	1 $+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	

Donc ………………………………………………………

EXERCICE 2 : (pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité)

1°) Voir l'exercice 2 pour les élèves ne suivant pas la spécialité.

2°) a) $f'(x)$ = ………….. et sur]0 ; +∞[, $f'(x)$…….0 donc f' est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

b) Soit (P_n) la propriété : $u_n \leq u_{n+1}$.

$u_0 = 2$ et u_1 = …….… ≤ 2 donc (P_0) est vérifiée.

Supposons que (P_n) soit vérifiée : $u_n \leq u_{n+1}$

Alors, $f(u_n)$ …… $f(u_{n+1})$ car f est ……………………………. sur]0 ; +∞[

Donc u_{n+1} …….u_{n+2} donc (P_{n+1}) est vérifiée

Donc la propriété (P_n) est vraie pour tout n, donc la suite (u) est décroissante.

c) Soit (P_n) la propriété : $u_n \geq 1$.

u_0 = ….. donc la propriété (P_0) est vérifiée.

Supposons que (P_n) soit vérifiée : $u_n \geq 1$

Alors, $f(u_n)$ ….. $f(1)$ car f est ……………………………. sur]0 ; +∞[

Donc u_{n+1} …… donc (P_{n+1}) est vérifiée

Donc pour tout entier n, $u_n \geq 1$.