Exercice sur le calcul intégral

Exercice 1 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x \ln x - x.$$

1. Calculer $g'(x)$. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

Exercice 2 :

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(4 + e^{-x})$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\ln 2} \frac{8}{4e^x + 1} dx$.

Exercice 3 :

1. g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - 4 + 4 \ln x$.
Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x > 0$.

2. f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 2 - \frac{4 \ln x}{x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

a) Etudier les variations de f.
b) Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
d) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
e) Etudier la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
f) Dresser le tableau de variation de f.
g) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$.
h) Représenter $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

3. h est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = -x + 2 - \frac{4}{x}$.

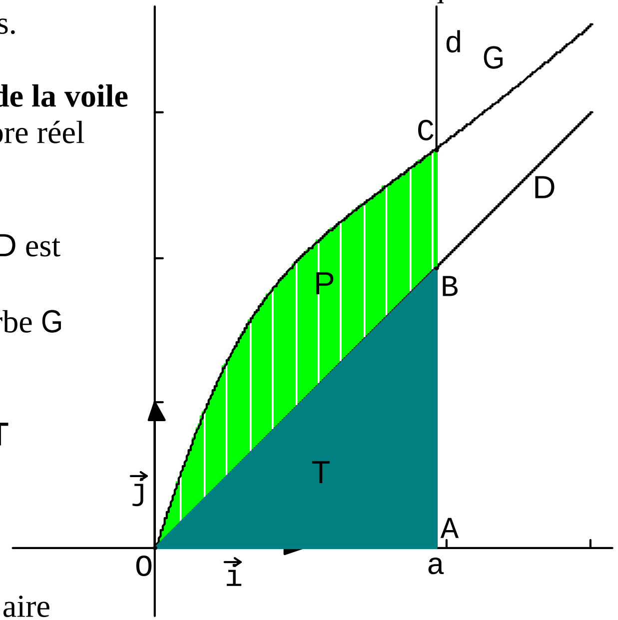
On appelle $\mathcal{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
a) Etudier les variations de h.
b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{H}$. Déterminer l'autre asymptote à $\mathcal{H}$.
c) Etudier les intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$, et étudier la position relative des deux courbes.

4. Calculer $\int_1^e (f(x) - h(x))dx$.

Exercice 4 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).
Dans ce repère, on a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{G}$ représentative de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

On a également tracé ci-dessous la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et une droite d parallèle à l'axe des ordonnées $(O ; \vec{j})$. Cette droite d coupe l'axe des abscisses, la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{G}$ respectivement aux points A, B et C de même abscisse a appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.

La réunion des parties $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ représente à l'échelle $\frac{1}{200^e}$ la voile d'un bateau.
Les parties $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ exigent des toiles différentes mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre a de telle sorte que les aires des parties $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ soient égales.



A - Etude du bord supérieur de la voile

1. Vérifier que, pour tout nombre réel positif x : $g(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

2. a) En déduire que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{G}$.
b) Etudier la position de la courbe $\mathcal{G}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

B – Calcul des aires de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$

1. Calculer en fonction de a :

$$I = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$$

2. Calculer, en fonction de a, l'aire en cm² du domaine délimité par la courbe $\mathcal{G}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$.

3. Calculer, en fonction de a, l'aire en cm² de la partie $\mathcal{T}$, puis en déduire l'aire de la partie $\mathcal{P}$.

C – Détermination du nombre *a*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2}$.

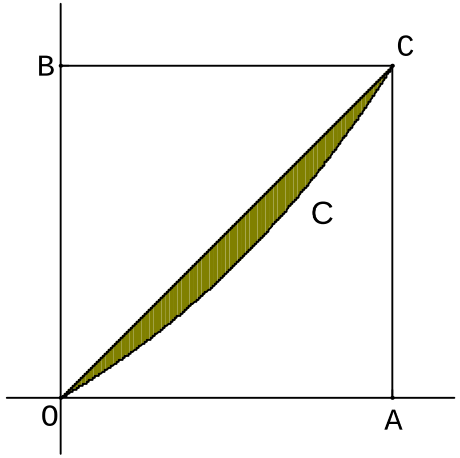
1. a) Déterminer la dérivée f' de f sur $[0\,;+\infty[$.
b) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $x(1-x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de f et déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a) Démontrer que dans l'intervalle [1 ; 10], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
Donner une encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
b) Démontrer que : $\ln(\alpha^2+1) = \dfrac{\alpha^2}{2}$.
c) En déduire que pour cette valeur α, les aires des parties P et T sont égales et donner la solution du problème posé.

Exercice 5 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).
Les points C et A ont respectivement pour coordonnées (1 ; 1) et (1 ; 0), et D est la droite d'équation $y = x$.

1. g est la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{1}{e-1}(e^x - 1)$.
a) Etudier les variations de g et vérifier que sa courbe représentative C passe par les points O et C.
b) Déterminer des équations des tangentes à C en O et C.
c) Etudier la position relative de C et D.
d) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe C, la droite D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. Dans cette question, on se propose de généraliser les résultats obtenus à la première question et d'en donner une interprétation économique.
On considère une fonction F définie et continue sur [0 ; 1] satisfaisant aux conditions (C) suivantes :

F est croissante, F(0) = 0 et F(1) = 1.

Interprétation économique
Une fonction F satisfaisant aux conditions (C) décrit la distribution de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés, que l'on classe par salaires croissants : F(x) représente le pourcentage des salaires perçus par le pourcentage x de salariés (par exemple, si 50% des salariés perçoivent 30% de la masse salariale, alors F(0,5) = 0,3). La courbe C correspondante est appelée **courbe de Lorentz**. Le coefficient γ égal au rapport de l'aire coloriée sur le dessin à l'aire du triangle OAC, appelé **indicateur de Gini**, est alors un indicateur d'inégalité de répartition salariale.



a) Vérifier que la fonction g étudiée à la première question satisfait aussi aux conditions (C) et donner la valeur γ_i de γ correspondante.
b) Mêmes questions pour les fonctions h et k définies sur [0 ; 1] par :

$h(x) = x^2$ et $k(x) = \dfrac{x^3+x}{2}$.

Les fonctions g, h et k représentent trois entreprises G, K et L. Classer ces trois entreprises de la plus égalitaire à la moins égalitaire.

Exercice 6 :
1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = 10\,(0,9)^t$.
a) En remarquant que $f(t) = 10\,e^{t\ln(0,9)}$, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et sa limite en $+\infty$.
b) Représenter f sur l'intervalle [0 ; 10]. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chaque axe.
2. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = 10\,(0,9)^n$.
a) Démontrer que la suite v est géométrique. Est-elle monotone ? (Justifier.)
b) Représenter la suite v par un diagramme en bâtons dans le même repère que f.
c) Calculer : $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ et $S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$.

3. On appelle I l'intégrale $\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,dt$.

a) En interprétant I, S et S' comme des aires, démontrer graphiquement que S' < I < S.
b) Calculer la valeur exacte de I.
c) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ; 10].
4. Une voiture a une valeur d'achat de 10 000€. On estime que sa valeur marchande (en euros constants) diminue de 10% par an.
a) Démontrer que sa valeur au bout de n années, exprimée en milliers d'euros, est v_n.
b) Au bout de combien d'année sa valeur est-elle inférieure à 4000€.
c) Evaluer sa valeur moyenne sur 10 ans d'utilisation.