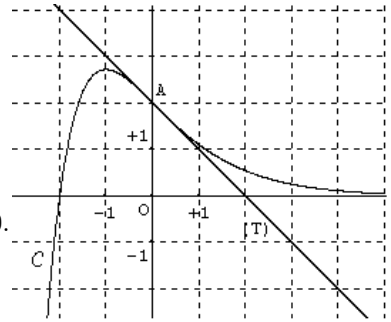
Exercice de révision

PARTIE A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-contre, la courbe $(\mathcal{C})$ représente la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.
   (a) Soit f' la dérivée de la fonction f. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1.(a).

   Pour la suite du problème, on définit la fonction f par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$
3. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Comment se traduit graphiquement ce résultat ?
   On rappelle que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{e^x}{x}$ est égale à $+\infty$.
4. Etablir que pour tout réel x, $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.
   En déduire le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer, en utilisant le tableau de variation de f, que $f(x) > 0$ sur $]-2;+\infty[$.

PARTIE B

Soient g et h les fonctions définies sur $]-2;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \ln(f(x))$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction g.
   (b) Déterminer les limites de g en -2 et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction h.
   (b) Déterminer les limites de h en -2 et en $+\infty$.

PARTIE C

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (cx+d)e^{-x}$.

1. Déterminer les réels c et d pour que k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$.
3. (a) Calculer $f(-1)$; en déduire que $f(x) \leq e$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut, de l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = e$, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$.

Correction de l'exercice :

PARTIE A

1. $f(0) = 2$
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, d'où $f'(0) = -1$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$
   $f(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = ax+b$; $u'(x) = a$
   $v(x) = e^{-x}$; $v'(x) = -e^{-x}$
   $f' = u'v + uv'$
   $f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax+b) = e^{-x}(a - ax - b) = e^{-x}(-ax + a - b)$
   on a $f(0) = 2$ et $f(0) = (a \times 0 + b)e^{-0} = b$ d'où' $b = 2$
   $f'(0) = -1$ et $f'(0) = e^{-0}(-a \times 0 + a - b) = a - b$
   d'où $a - b = -1$ et $a = 1$
   donc $f(x) = (x+2)e^{-x}$
3. (a) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
   (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ or à l'infini, une exponentielle de x l'emporte sur les puissances de x,
   d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$
   La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
4. Pour tout x, $f'(x) = e^{-x}(-1x + x - 2)$
   car $a = 1$ et $b = 2$ dans l'expression de $f'(x)$ de la question 2.
   $f'(x) = e^{-x}(-x-1) = -e^{-x}(x+1)$
   pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, d'où $-e^{-x} < 0$
   et $x + 1 < 0$ signifie $x < -1$
   Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $-e^{-x}$		-		-	
signe de $x+1$		-	0	-	
$f'(x)$		+	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

   $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)}$
   $= 1e^1 = e$
5. $f(-2) = (-2+2)e^{-(-2)} = 0$
   Comme f est strictement croissante sur $]-2;-1[$ et $f(-2) = 0$, $f(x) > 0$ sur $]-2;-1[$
   De plus f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$
   donc $f(x) > 0$ sur $]-1;+\infty[$.
   Donc $f(x) > 0$ sur $]-2;+\infty[$.

PARTIE B

g et h sont définies sur $]-2;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $h(x) = \ln(f(x))$

1. (a) g est dérivable sur $]-2;+\infty[$

   $g = \dfrac{1}{f}$ d'où $g' = -\dfrac{f'}{f^2}$

   Comme $(f(x))^2 > 0$ sur $]-2;+\infty[$,

   $g'(x)$ est alors du signe contraire de celui de $f'(x)$

   Tableau de variation de g :

x	-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

   (b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} g(x) = +\infty$

   $f(-1) = e$ d'où $g(-1) = \dfrac{1}{e}$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. h est dérivable sur $]-2;+\infty[$

   $h(x) = \ln(f(x))$ $h' = \dfrac{f'}{f}$

   Comme $f(x) > 0$ sur $]-2;+\infty[$, $h'(x)$ est alors du signe de $f'(x)$

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
h	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} f(x) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} h(x) = -\infty$

   $f(-1) = e$ d'où $h(-1) = \ln e = 1$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

PARTIE C

k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (cx+d)e^{-x}$

1. On veut que k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie $k'(x) = f(x)$

   $k(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = cx + d$ $u'(x) = c$

   $v(x) = e^{-x}$ $v'(x) = -e^{-x}$

   $k' = u'v + uv'$

   $k'(x) = ce^{-x} + (cx+d)(-e^{-x}) = e^{-x}(c - cx - d) = e^{-x}(-cx + c - d)$

   On veut $k'(x) = f(x) = (x+2)e^{-x}$

   On a alors $-c = 1$ et $c - d = 2$

   ce qui nous donne : $c = -1$ et $-d = 2 + 1$; $d = -3$

   donc $k(x) = (-x-3)e^{-x} = -(x+3)e^{-x}$

2. L'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$ est :

   $$\int_{-2}^{4} f(x)\ dx = k(4) - k(-2)$$
   $$= -(4+3)e^{-4} - (-(-2+3)e^{-(-2)}) = -7e^{-4} + e^2 \simeq 7,26$$

3. (a) $f(-1) = e$ d'après la question 4. PARTIE A

   f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint pour $x = -1$ et ce maximum est e

   d'où $f(x) \leq e$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) L'aire de la partie limitée par la droite d'équation $y = e$, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$ est :

   $$\int_{-2}^{4} (e - f(x))\ dx = \int_{-2}^{4} e\ dx - \int_{-2}^{4} f(x)\ dx$$
   $$= 4e - (-2e) - (-7e^{-4} + e^2) = 6e + 7e^{-4} - e^2 \simeq 9,05.$$