| GRAPHES PROBABILISTES | |
|---|---|
| ***Graphes*** | ***Terminale ES spécialité*** |

**Exercice 1** *(Centres étrangers, juin 2005)*
On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs.
On désigne par :
- $f_n$ le pourcentage de fumeurs à la génération de rang *n*,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang *n*, où *n* est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2) Justifier l'égalité matricielle :

$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où *A* désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5) Montrer que : pour tout entier naturel *n*, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.
6) On pose, pour tout entier naturel *n*, $u_n = f_n - 0,2$.
   a) Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Donner l'expression de $u_n$ en fonction de *n*.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
   d) Déterminer la limite de la suite $f_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

**Exercice 2** *(Liban, juin 2003)*
Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans.
$n$ étant un entier naturel, on note:
$a_n$ la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année *n ;*
$b_n$ la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année *n ;*
$P_n$ la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année *n.*
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1) On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.
2) a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.

3) Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable, où $x$ et $y$ sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.

Justifier que $x$ et $y$ vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
Déterminer $x$ et $y$.
En déduire la limite de la suite $(a_n)$ quand $n$ tend vers plus l'infini.
Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

**Exercice 3** *(Amérique du Sud, novembre 2004)*
Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
$a_n$ la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine $n$ ;
$b_n$ la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine $n$ ;
$P_n$ la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine $n$.

1) Déterminer l'état initial $P_1$.
2) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3) En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
4) Déterminer l'état probabiliste $P_3$ et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5) Déterminer le réel $x$ tel que $(x \ ; 1-x) \times M = (x \ ; 1-x)$.
On admet que la suite $(a_n)$ est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

**Exercice 4** *(Antilles, juin 2004)*
On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant (e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la *n*-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n$ +1-ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la *n*-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note $a_n$ la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition $n$ et $b_n$ la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition $n$.
L'état probabiliste lors de la compétition $n$ est donc représenté par la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

1) Représenter G et donner sa matrice.
2) Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
   a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux

200 mètres lors de cette compétition.

b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.

3) Déterminer l'état stable du graphe G.

4) Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.

Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

**Exercice 5** *(Polynésie, juin 2004)*

*Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.*
*Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.*

### Partie A

• S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.

• S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1) Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.

2) En déduire la probabilité des évènements suivants :

J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;

K : « il fera sec mardi » ;

L : « il fera humide mercredi ».

### Partie B

1) Soit $n$ un entier naturel, on note :

$s_n$ la probabilité pour que le jour $n$, il fasse sec ;

$h_n$ la probabilité pour que le jour $n$, il fasse humide ;

$\mathrm{P}_n$ la matrice $\begin{pmatrix} s_n & h_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour $n$. Déterminer une relation entre $s_n$ et $h_n$.

2) a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.

3) La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $\mathrm{M}^2$ (utiliser la calculatrice).

b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans

la partie A.

4) a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

**Exercice 6** *(France, septembre 2004)*

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
- 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1) Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

2) Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

a) Donner la matrice de transition (notée $A$) associée au graphe précédent.

b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

3) On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n \\ \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.