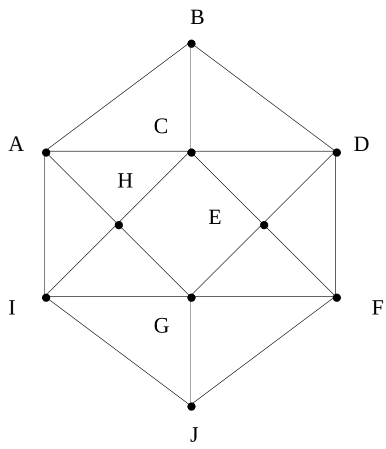
**Terminales ES - Spécialité - Trois problèmes de graphes**

**[1]** Le graphe ci-dessous s'appelle un diamant de Birkhoff. Le but du problème est de trouver le nombre chromatique de ce graphe.




1a. Existe-t-il une chaîne eulerienne de ce graphe ?

b. Proposer un sous-graphe ayant une chaîne eulerienne.

c. Proposer un sous-graphe ayant un cycle eulerien.

2.Le but de cette partie est de trouver le nombre chromatique de ce graphe.

a. Quelle est la longueur minimale d'un cycle de ce graphe ? En déduire un minorant du nombre chromatique de ce graphe.

b. Quel est le degré maximal de ce graphe ? En déduire un majorant du nombre chromatique.

c. À l'aide d'un algorithme de coloration proposer une coloration du graphe. Comparer le nombre de couleur au minorant. Conclure.

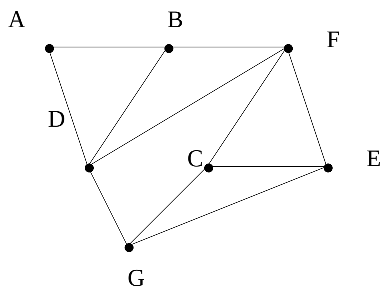
**[2]** Il y a sept commissions parlementaires $a, B, C, D, E, F, G$ dont sont membre dix députés que l'on nomme $d_1$ à $d_{10}$.

$A = \{d_1, d_2, d_5\}$ $B = \{d_4, d_5, d_{10}\}$ $C = \{d_3, d_6, d_8\}$ $D = \{d_2, d_4, d_5, d_9\}$ $E = \{d_3, d_6, d_8\}$ $F = \{d_3, d_4, d_7\}$ $G = \{d_6, d_7, d_9\}$

Les sept commissions ne peuvent pas siéger en même temps, le but est de trouver le nombre minimal de cessions à organiser pour que toutes les commissions aient lieu.

1.a. Proposer à l'aide d'un graphe, une modélisation de ce problème.

b. Vérifier que ce modèle nous donne le graphe ci-dessous.

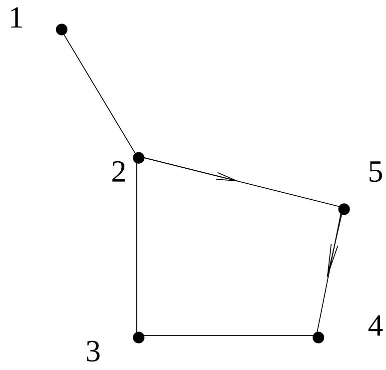



2.a. Donner un cycle de longueur trois dans le graphe ci-dessus. En déduire un minorant du nombre chromatique de ce graphe.

b. Avec un algorithme de coloration utilisant l'ordre alphabétique des sommets, proposer une coloration de ce graphe avec quatre couleurs.

c. Refaire l'algorithme en prenant comme ordre des sommets : $FABCDEG$ et montrer que le nombre minimal de cessions est de 3.

**[3]** Le graphe suivant représente 5 gîtes d'étape et les chemins qui permettent de les rejoindre. Quand l'arrête est orientée, le chemin n'est praticable que dans une sens.




1.a. Le graphe non orienté (on ne tient pas compte des flèches), admet-il une chaîne eulerienne ? Si oui en nommer une.

b. Sur le terrain (on tient compte des flèches) est-il possible d'organiser une randonnée où l'on dort une et une seule fois dans tous le gîtes (incluant départ et arrivée) ? Expliquer.

2.a Donner la matrice associée à ce graphe.

b. Un association de randonnée propose d'organiser une sortie partant d'un gîte et finissant à un gîte avec une nuit (dormie dans un gîte différent de celui de départ). Combien il y a-t-il de possibilités ?

c. Pour augmenter les choix sans trop d'organisation supplémentaire, l'association souhaiterait dans les conditions de la question précédente, proposer deux trajets différents avec les même points de départ et d'arrivée. Qu'elles sont toutes les possibilités pour les points de départ et d'arrivée ?

**Terminales ES - Spécialité - Trois problèmes Correction**

**[1]** Le graphe ci-dessous s'appelle un diamant de Birkhoff. Le but du problème est de trouver le nombre chromatique de ce graphe.

1. a. Il n'existe pas de chaîne eulerienne car le nombre de sommets de degrés impair est strictement supérieur à 2.

b. Proposer un sous-graphe ayant une chaîne eulerienne s'obtient en retirant les arrêtes : $a_{BC}$, $a_{HG}$, $a_{EG}$ et $a_{GJ}$. par exemple. dans ce sous graphe seuls les sommets $H$ et $E$ sont de degrés impairs.

c. Un sous-graphe ayant un cycle eulerien est un sous graphe où aucun sommet n'est de degrés impair. Un tel sous graphe est le sous graphe précédent où l'on retire de plus les arrêtes $a_{CH}$ et $a_{CE}$.

2.a. La longueur minimale d'un cycle de ce graphe est de trois. On en déduit qu'un minorant du nombre chromatique de ce graphe est 3.

b. Le degré maximale de ce graphe est de 5 ? Donc un majorant du nombre chromatique est 6.

c. On peut faire l'algorithme suivant en utilisant l'ordre alphabétique des sommets :

La couleur courante est $c_1$,

$A(c_1)$, $B$, $C$, $H$, $I$ sont adjacents,

$D(c_1)$, $E$, $F$ sont adjacents,

$G(c_1)$, $J$ est adjacent.

La couleur courante est $c_2$,

$B(c_1)$, $C$ est adjacent,

$E(c_1)$, $F$, $G$ sont adjacents,

$H(c_2)$, $I$ est adjacent,

$J(c_2)$.

La couleur courante est $c_3$,

$C(c_3)$, $F(c_3)$, $I(c_3)$.

Le nombre de couleur obtenue est de 3, ce qui est égal au minorant obtenu à la question précédente. Donc le nombre chromatique est de trois.

**[2]**

1.a. On modélise ce problème par un graphe dont les sommets représentent les différentes commissions. Deux sommets sont reliés par une arrête si les commissions correspondantes ne peuvent avoir lieux en même temps.

On colorera ce graphe et chaque couleur correspondra à une session de commissions en parallèle.

2.a. Le cycle $ABD$ est de longueur trois. On en déduit qu'un minorant du nombre chromatique de ce graphe est 3. En effet trois couleurs sont nécessaires pour colorer ce cycle.

b. Soit $c_1$ la couleur courante.

On colore $A(c_1)$, $B, D$ lui sont adjacents, on colore $C(c_1)$, $E, F, G$ lui sont adjacents. Il n'y a plus de sommets à colorer avec $c_1$.

Soit $c_2$ la nouvelle couleur courante.

On colore $B(c_2)$, $D, F$ lui sont adjacents, on colore $E(c_2)$, $F, G$ lui sont adjacents. Il n'y a plus de sommets à colorer avec $c_2$.

Soit $c_3$ la nouvelle couleur courante.

On colore $D(c_3)$, $F, G$ lui sont adjacents. Il n'y a plus de sommets à colorer avec $c_3$.

Soit $c_4$ la nouvelle couleur courante.

On colore $F(c_4)$, on colore $G(c_4)$.

On a donc coloré ce graphe avec 4 couleurs.

c. On refait cet algorithme en commençant par $F$ puis en suivant l'ordre alphabétique.

Soit $c_1$ la couleur courante.

On colore $F(c_1)$, $B, C, D, E$ lui sont adjacents, on colore $A(c_1)$, on colore $G(c_1)$.

Soit $c_2$ la nouvelle couleur courante.

On colore $B(c_2)$, $D$ lui est adjacent, on colore $C(c_2)$, $E$ lui est adjacent.

Soit $c_3$ la nouvelle couleur courante.

On colore $D(c_3)$, on colore $E(c_3)$.

On a donc coloré le graphe avec trois couleurs. Donc le nombre minimum de cessions parallèles à organiser est de 3 qui est le nombre chromatique du graphe puisque on a vu qu'il était minoré par trois.

[**2**] Le graphe suivant représente 5 gîtes d'étape et les chemins qui permettent de les rejoindre. Quand l'arrête est orientée, le chemin n'est praticable que dans une sens.

1.a. Le graphe non orienté admet une chaîne eulerienne car il a exactement deux sommets de degrés impair 1(1) et 2(3). Une chaîne est 1-2-5-4-3.

b. Sur le terrain (on tient compte des flèches) il est possible d'organiser une randonnée où l'on dort une et une seule fois dans tous le gîtes (incluant départ et arrivée) en suivant la chaîne proposée ci-dessus qui suit le sens des flèches.

2.a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On calcule le carré de cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 14 possibilités.

c. Ceci correspond aux entrés du carré de la matrice du graphe égale à 2. Ce qui nous donne les possibilités suivantes :

2-1-2 et 2-3-2 ; 2-3-4 et 2-5-4 ; 3-2-3 et 3-4-3