

## Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 1 : Ecrire sous la forme d'une puissance de  $e$  les expressions suivantes :

a)  $\frac{e^7}{e^2}$                       b)  $\frac{(e^{-1})^4}{e}$                       c)  $(\exp(e^2))^{-3}$   
d)  $e^2 \exp(-3)$                       e)  $e^{-3} \times \exp(2)$                       f)  $\exp(1) \times \exp(-2)$

Exercice 2 : Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

a)  $\ln\left(\exp\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$                       b)  $\exp(\ln(3) - 1)$                       c)  $e^{5 \ln 3} - 3e^{\ln 7}$   
d)  $\frac{e^{2 \ln 3}}{e^{\ln 8}}$                       e)  $\frac{e^3}{e^{4 + \ln 3}}$

Exercice 3 : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\exp(2x - 3) = 1$                       b)  $e^x = 2$   
c)  $e^{-2x} = -2$                       d)  $\exp(3x + 1) = e^{1-5x}$   
e)  $e^{4x+1} = 3$                       f)  $e^{2x} = e^{-x}$

Exercice 4 : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$                       b)  $e^{x^2-16} = 144$   
c)  $e^{(x-4)(2x-1)} = e$                       d)  $e^{-x} + e^x = 2$   
e)  $e^x - 5 + \frac{6}{e^x} = 0$                       f)  $2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$

Exercice 5 : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $e^{3x+1} > 0$                       b)  $e^{\frac{1}{2}x+1} \leq -2$                       c)  $e^{-5x+2} < 1$   
d)  $\exp(3x + 14) > -3$                       e)  $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{-2x+6}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^x}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(\sqrt{x} - 5)$                       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 2)$   
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})$                       f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{3 - e^x}$

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} - 2e^x + 4)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2-x+1}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2)$                       d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1}$   
e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x$

Exercice 8 :

1. Démontrer que :

pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .

2. Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$                       d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Exercice 9 : Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1.  $x \mapsto \exp(x^2)$  est la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $f(x) = \exp(x^2)$

2.  $x \mapsto -e^{-x}$  est la dérivée de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $g(x) = e^{-x}$

3.  $x \mapsto -\frac{1}{e^{2x}}$  est la dérivée de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{1}{e^x}$$

4.  $x \mapsto (3x^2 - 1)\exp(x^3 - x + 1)$  est la dérivée de la fonction  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $k(x) = e^{x^3-x+1}$

Exercice 10 : Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de validité des calculs.

a)  $f(x) = e^{-x}$                       b)  $g(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$   
c)  $h(x) = (x + 1)e^x$                       d)  $k(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$   
e)  $m(x) = \ln(3 + e^{-x})$

**Exercice 11 :** Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. La fonction  $\exp$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\exp$ .
2. La fonction  $f : x \mapsto e^{-3x}$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $F : x \mapsto e^{-3x}$ .
3.  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = \exp(3x^2 - 5)$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $g : x \mapsto 6x \exp(3x^2 - 5)$ .
4. La fonction  $h : x \mapsto (e^x)^3$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $H : x \mapsto \frac{1}{3} e^{3x}$ .
5.  $K : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$  est une primitive sur  $]0 ; +\infty[$  de la fonction  $k$  définie par :  $x \mapsto \frac{2}{x^3} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

**Exercice 12 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$  dont le tableau de variation est donné ci-après.

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\infty$	$a$	0

1. Justifier les renseignements consignés dans le tableau ci-dessus en précisant la valeur de  $a$ .
2. Résoudre algébriquement l'inéquation  $f(x) \geq 0$ .

**Exercice 13 :** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{e^x}{2(1-x)}$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Justifier les éléments contenus dans le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f$	0	$+\infty$	$-\frac{e^2}{2}$	$-\infty$

2. Tracer  $C$  dans  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 14 :**

**A-** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + e^x$ .

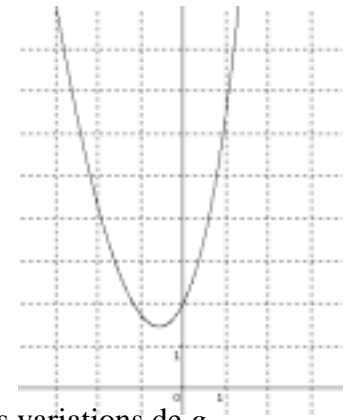
On appelle  $C$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Étudier les variations de  $f$ .
3. Déterminer les coordonnées du point de  $C$  où la tangente  $T$  à  $C$  a pour coefficient directeur 3.
4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ . Étudier le signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
5. Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $C$  en  $-\infty$ .

Préciser la position de  $D$  par rapport à  $C$ . Pour quelles valeurs de  $x$  la distance entre  $C$  et  $D$  (mesurée parallèlement à  $(O ; \vec{j})$ ), est-elle inférieure à 0,01 cm ?

6. Représenter  $C$  sur  $[-3 ; 2]$ , ainsi que  $D$  et  $T$ .

**B-** La courbe  $\Gamma$  ci-dessous représente dans un repère orthonormé la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^2 + 2e^x$ .



1. En utilisant ce qui précède, étudier les variations de  $g$ . On veillera à donner, dans le tableau de variation, des valeurs exactes. On pourra poser  $\beta = g(\alpha)$ .
2. Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Pour  $m$  réel, on considère l'équation  $g(x) = m$ . Discuter selon la valeur de  $m$  le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de cette équation.

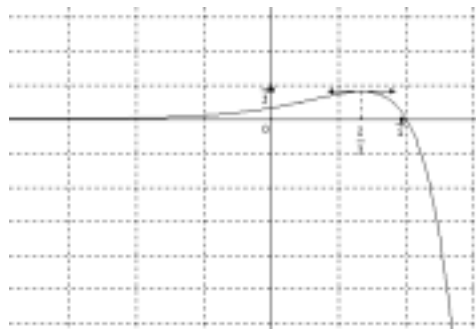
**Exercice 15 :** Le plan est rapporté à un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

La courbe C ci-dessous représente la fonction  $f$  définie sur  $\left[-2, \frac{4}{3}\right]$  par :

$$f(x) = (ax + b)e^{cx},$$

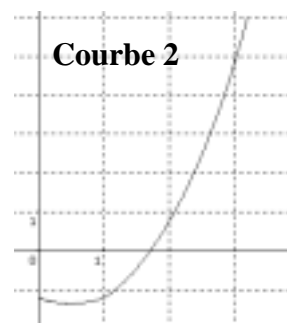
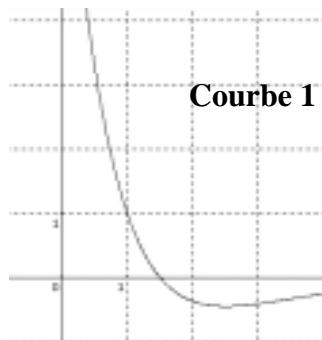
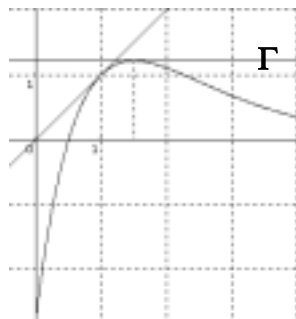
où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que la courbe C contient les points de coordonnées  $(1 ; 0)$  et  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$  et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\frac{2}{3}$ .

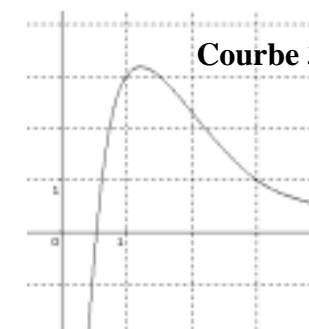


1. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Donner  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f'\left(\frac{2}{3}\right)$ .
3. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .
4. Déduire des questions précédentes les réels  $a, b$  et  $c$ .

**Exercice 16 :** On donne ci-dessous la courbe  $\Gamma$  représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 4]$  et ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.



**Courbe 2**



**Courbe 3**

1. Lire graphiquement  $f(1)$ ,  $f'(1)$  et  $f'(1,5)$ .
2. Parmi les trois courbes (courbes 1 à 3), laquelle est susceptible de représenter  $f'$ , la fonction dérivée de  $f$ ? Justifier la réponse à l'aide d'arguments graphiques.
3. On admet que  $f(x) = (ax + b)e^{-x+1}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels fixés. Calculer  $f'(x)$  puis utiliser la question 1. pour déterminer  $a$  et  $b$ .
4. On pose :  $H(x) = -(2x + 1)e^{-x+1}$  sur  $[0 ; 4]$ . Vérifier que  $H$  est une primitive de  $f$  sur  $[0 ; 4]$ .

**Exercice 17 :** Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]-\infty ; 1]$  par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4.$$

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

**A- 1.** Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

**2.** Soit  $g(x) = e^x \left( \frac{3}{2}e^x - 1 \right)$

Démontrer que  $g(x)$  s'annule pour  $x = \ln \frac{2}{3}$ .

Etudier le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 1]$ .

**3. a)** Démontrer que  $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$ .

**b)** En déduire que la droite D d'équation  $y = -2x - 4$  est asymptote à C. Etudier la position de C par rapport à D.

**4.** Calculer  $f'(x)$ . Démontrer que :

pour tout  $x$  de  $]-\infty ; 1]$ ,  $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$ .

En déduire le signe de  $f'(x)$ .

Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

**B- 1.** Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $x_0$  dans l'intervalle  $[-3 ; 0]$ . En utilisant une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $x_0$ .

**2. a)** Résoudre l'équation  $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$  en posant  $X = e^x$ .

**b)** En déduire qu'il existe un point A unique de C où la tangente a pour coefficient directeur 2, et que l'abscisse de A est égale à  $\ln \frac{4}{3}$ .

Tracer la droite D, la courbe C et la tangente à C en A.