Chapitre IX : Croissance exponentielle

1 La notation a^b (avec $a > 0$ et b réel)

Définition : Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, le nombre a^b est défini par : $a^b = e^{b \ln a}$.

Remarque : si $a = 1$, $1^b = e^{b \ln 1} = e^0 = 1$. Donc pour tout réel b, $1^b = 1$.

2 Propriétés algébriques

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants réels non entiers.
Remarque : $\ln a^b = b \ln a$. Cette formule, connue losque b est entier, est également vraie lorsque b est un réel quelconque.

3 Racine n-ième d'un réel a strictement positif

Propriété : a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
Alors : $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$;
$a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre strictement positif dont la puissance n-ième est égale à a.
Définition : pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine n-ième de a, et on note : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Cas particulier : si $n = 2$, on a alors, si $a > 0$: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Applications :
• La population d'une commune est passée de 9106 personnes en 1990 à 9898 en 1999. Calculer le taux annuel moyen de croissance de la population sur cette période de 9 ans.
t est le taux annuel moyen de croissance de la population sur la période 1990-1999.
En 1991, la population est de $9106 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$; en 1992, elle est de $9106 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$, ...
En 1999, elle est alors de $9106 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^9$
On a donc $9898 = 9106 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^9$, d'où $\dfrac{9898}{9106} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^9$; ainsi $1 + \dfrac{t}{100} = \left(\dfrac{9898}{9106}\right)^{\frac{1}{9}}$
et $t = \left[\left(\dfrac{9898}{9106}\right)^{\frac{1}{9}} - 1\right] \times 100$ d'où $t \simeq 0,93$.
Le taux annuel cherché est alors environ 0,93%.

• Le tableau suivant donne, en pourcentages, pour trois années consécutives, les variations, par rapport à l'année précédente, du cours d'une action.

Rang de l'année	1	2	3
Taux de variation du cours	+25,3	+38,7	-36,2

Notons C_0 le cours de cette action à la fin de l'année de référence (ou année 0).
1. Exprimer C_1 en fonction de C_0. Exprimer de même C_2 et C_3.
2. On appelle taux annuel moyen de variation du cours, le taux annuel t_C tel que si le cours de l'action avait varié chaque année de ce taux constant t_C, son cours serait C_3 au bout de trois ans.
   (a) Vérifier que $\left(1 + \dfrac{t_C}{100}\right)^3 = \dfrac{C_3}{C_0}$.
   (b) En déduire une valeur approchée, arrondie au dixième, de t_C.

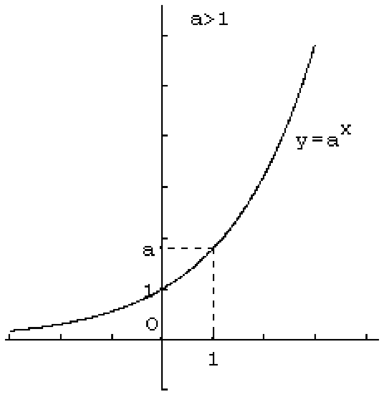
4 Etude des fonctions $x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$

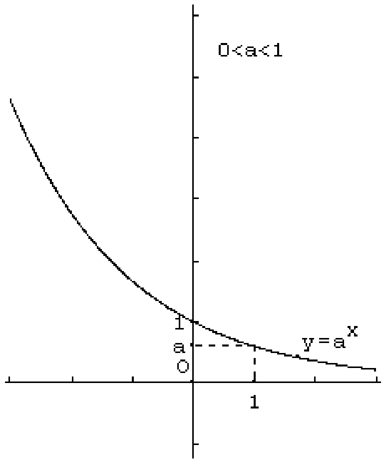
Définition : a étant un nombre réel **strictement positif**, on appelle **fonction exponentielle de base** a, la fonction $x \longmapsto a^x$, c'est à dire $x \longmapsto e^{x \ln a}$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarques :
• Pour tout réel x, $e^{x \ln a} > 0$, donc $a^x > 0$.
• La fonction $x \longmapsto a^x$ est de la forme $x \longmapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$.

Les propriétés de cette fonction se déduiront donc de celles de la fonction exponentielle.

Courbes représentant $x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$





5 Lien avec les suites géométriques

Rappel : Une suite est dite géométrique si on passe d'un nombre au nombre suivant en multipliant toujours par le même facteur que l'on appelle la raison.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n \times q$ où q est la raison.
Le terme général d'une suite géométrique est de la forme : $u_n = u_0 \times q^n$ où q est la raison.

Somme des premiers termes d'une suite géométrique
Soit une suite définie par $u_n = u_0 \times q^n$. On veut calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$.

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \quad ; \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarque : si $q = 1$, alors pour tout n, $u_n = u_0$ et $S_n = \overbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}^{n+1 \ termes} = (n+1) \times u_0$.

Propriété : v est la suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$.
- Si $0 < q < 1$, v est décroissante. On parle de décroissance exponentielle.
- Si $q = 1$, v est constante.
- Si $q > 1$, v est croissante. On parle de croissance exponentielle.