Devoir surveillé n° 6
Classe de terminale ES

Étude d'une fonction - exponentielles - applicaton économique



On veillera à détailler et à rédiger clairement les raisonnements, à soigner son écriture et sa présentation. Il en sera tenu largement compte.

La calculette graphique est autorisée mais aucun document ni formulaire n'est autorisé.

# Énoncé

## Partie A

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 4$$

1. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
   **b.** Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_0$ appartenant à $]1\,;2[$. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ de $x_0$.
3. Déduire des r résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

## Partie B

Un entreprise fabrique un produit, en qantité $x$ exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant pas dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x-3)e^x + 3x + 4$$

Le coût moyen est défini sur $]0\,;3]$ par la formule $C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout $x$ de $]0\,;3]$, calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie :

$$C'_m(x = \frac{f(x)}{x^2}$$

   En déduire le sens de variation de $C_m$ sur $]0\,;3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ? Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

## Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. **a.** Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de $x$ tonnes du produit est notée $B(x)$. Montrer l'égalité : $B(x) = (3 - x)e^x - 4$.

   **b.** Étudier le sens de variation de $B$ sur $[0\,;3]$. Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. **a.** Tracer la courbe représentative de $B$ dan un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 *cm* pour une tonne en abscisse et 2 *cm* pour 100 000 euros en ordonnée).

   **b.** À l'aide du graphique, déterminer à $0,1$ près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

*Baccalauréat - France métropolitaine*
*session de Juin 2002*

# Corrigé

## Partie A

### Question 1. a

Pour tout $x$ non nul, on peut écrire : $\quad x^2-3x+3 = x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+3)=+\infty \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+3)e^x=+\infty$$

On en déduit : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

### Question 1. b

La fonction dérivée de $f$ est la même que la dérivée de la fonction produit :

$$p : x \longmapsto (x^2-3x+3)e^x$$

.

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (2x-3)e^x+(x^2-3x+3)e^x \\ & = & [(2x-3)+(x^2-3x+3)]e^x \\ & = & (x^2-x)e^x \\ & = & x(x-1)e^x \end{array}$$

Comme la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, et que sur $[0\,;+\infty[$, le signe de $x$ est positif ou nul (nul en 0), le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ dépend de celui de $(x-1)$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-1$ | $\searrow$ | $e-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### Question 2

$f(1)=e-4$ est un réel négatif proche de $-1,3$.
$f(2)=e^2-4$ est un réel positif proche de $4,4$.

**a)** La fonction $f$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est dérivable, donnera sur l'intervalle $[1\,;2]$ toutes les valeurs intermédiaires aux réels $e-4$ et $e^2-4$. En particulier, elle donnera, pour un réeel $x_0$ au moins, l'image 0.

Cet $x_0$ ne peut être 1 (puisque $f(1)<0$) ni 2 (puisque $f(2)>0$).

Il existe donc, sur l'intervalle $]1\,;2[$, au moins un réel $x_0$ tel que $f(x_0)=0$ (solution de l'équation $f(x_0)=0$).

**b)** Comme $f$ est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, deux réels distincts sur cet intervalle ne peuvent avoir la même image. Il est donc impossible de trouver dans cet intervalle deux réels ayant pour image 0 par $f$. On a vu que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $x_0$ dans l'intervalle $]1\,;2[$. Cette solution est donc unique, non seulement dans $]1\,;2[$, mais plus largement dans $[1\,;+\infty[$.

**c)** Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$, on a $x\geqslant 0$. Comme $f$ est décroissante sur cet intervalle, on en déduit $f(x)\leqslant f(0)$ c'est à dire $f(x)\leqslant -1$. Les images par $f$ des réels de $[0\,;1]$ sont donc négatives et l'équation $f(x)=0$ ne peut avoir de solution sur $[0\,;1]$.

Dans $[0\,;+\infty[$ il y a donc une seule solution $x_0$ à l'équation $f(x)=0$ ; cette solution se trouve dans l'intervalle $]1\,;2[$.

La calculette, réglée avec un pas de $10^{-3}$ à partir de 1.641 indique :

| $X$ | $Y_1$ | |
|---|---|---|
| 1.641 | $-.0272$ | |
| 1.642 | $-.0217$ | |
| 1.643 | $-.0163$ | |
| 1.644 | $-.0108$ | |
| 1.645 | $-.0053$ | |
| 1.646 | $1.9E-4$ | |
| 1.647 | .00572 | |

Nécesairement $x_0<1,646$, car sinon, on aurait $x_0\geqslant 1,646$ et, avec la croissance de $f$ sur $]1\,;2[$, cela donnerait $f(x_0)\geqslant g(1,646)$, c'est à dire $0\geqslant 0,00019$, ce qui serait absurde.

Nécessairement $x_0>1,645$, car sinon, on aurait $x_0\leqslant 1,645$ et, avec la croissance de $f$ sur $]1\,;2[$, cela donnerait $f(x_0)\leqslant g(1,645)$, c'est à dire $0\leqslant -0,0053$, ce qui serait absurde.

On peut donc dire que $x_0$ appartient à l'intervalle $[1,645\,;1,646]$, et tout réel de cet intervalle est une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-3}$ près (diamètre de l'intervalle).

Par exemple, on prendra $x_0=1,645$ ou $x_0=\frac{413}{251}$.

### Question 2

On a vu, (2.c) que sur $[0\,;1]$ ; $f$ est négative.

Par ailleur, sur $[1\,;+\infty[$, $f$ est croissante, donc :
– si $x>x_0$, alors $f(x)>f(x_0)$, c'est à dire $f(x)>0$
– si $x<x_0$, alors $f(x)<f(x_0)$, c'est à dire $f(x)<0$

Le signe de $f(x)$ est donc fourni par le tableau :

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## Partie B

### Question 1

Calculons la dérivée de $C_T$.

Soient $u$, $v$ et $w$ les fonctions définies par :

$$u(x) = x - 3 \qquad v(x) = e^x \qquad w(x) = 3x + 4$$

On a $C_T = uv + w$ et par conséquent, $C_T' = uv' + u'v + w'$

$$\begin{aligned} C_T'(x) &= 1 \times e^x + (x-3)e^x + 3 \\ &= e^x(1 + x - 3) + 3 = e^x(x-2) + 3 \end{aligned}$$

La fonction $C_m$ est un quotient dont le numérateur est $C_T$. On a donc :

$$\begin{aligned} C_m'(x) &= \frac{C_T'(x) \times x - 1 \times C_T(x)}{x^2} \\ &= \frac{[e^x(x-2)+3]x - [(x-3)e^x + 3x + 4] \times 1}{x^2} \\ &= \frac{x(x-2)e^x + 3x - (x-3)e^x - 3x - 4}{x^2} \\ &= \frac{e^x[x(x-2) - (x-3)] - 4}{x^2} \\ &= \frac{e^x[x^2 - 2x - x + 3] - 4}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 3)e^x}{x^2} \\ &= \frac{f(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Le signe de $C_m'(x)$ ne dépend que de celui de son numérateur (le dénominateur est un carré), c'est à dire de celui de $f(x)$. Dans la partie A, nous avons obtenu le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit, pour obtenir celui de $C_m'(x)$, de se restreindre à l'intervalle $]0\,;3]$. Les variations de $C_m$ suivent.

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_m'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C_m$ | ‖ | $\searrow$ | $C_m(x_0)$ | $\nearrow$ | |

### Question 2

Le coût moyen de production sera atteint pour une production qui, exprimée tonnes, est $x_0$, c'est à dire, 1,645 tonnes.

Le cout moyen minimum d'une tonne de ce produit, exprimé en centaines de milliers d'euros est $C_m(x_0)$, c'est à dire $1,91$. Le coût moyen minimum d'une tonne de ce produit est donc 191 000 euros.

## Partie C

### Question 1. a

Sachant que le prix du produit est proportionnel à la quantité (300 000 euros par tonne), le produit de cette vente, exprimé en centaines de milliers d'euros, est fourni par la fonction P, définie sur $[0\,;3]$ par $P : x \longmapsto 3x$.

Le bénéfice réalisé s'exprime alors par : $B(x) = P(x) - C_T(x)$, et l'on a :

$$\begin{aligned} B(x) &= 3x - [(x-3)e^x + 3x + 4] \\ &= 3x - (x-3)e^x - 3x - 4 \\ &= -(x-3)e^x - 4 \\ &= (3-x)e^x - 4 \end{aligned}$$

### Question 1. b

Calculons la dérivée de $B$ sur l'intervalle $[0\,;3]$ :

$$B'(x) = [(3-x)e^x + (-1)e^x] - 0 = e^x[(3-x) - 1] = e^x(2-x)$$

Comme la fonction exponentielle est positive, le signe de $B'(x)$ est déterminé par celui de $(2-x)$. Les variations de $B$ s'en déduisent :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $B$ | $-1$ | $\nearrow$ | $B(2)$ | $\searrow$ | $-4$ |

Le bénéfice est maximum pour une production de 2 tonnes du produit.

### Question 2

Établissons à l'aide de la calculette un tableau de valeurs pour $B$ :

| $x$ | $0$ | $0.5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ | $2,5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(x)$ | $-1$ | $0,12$ | $1,4$ | $2,7$ | $3,4$ | $2.1$ | $-4$ |

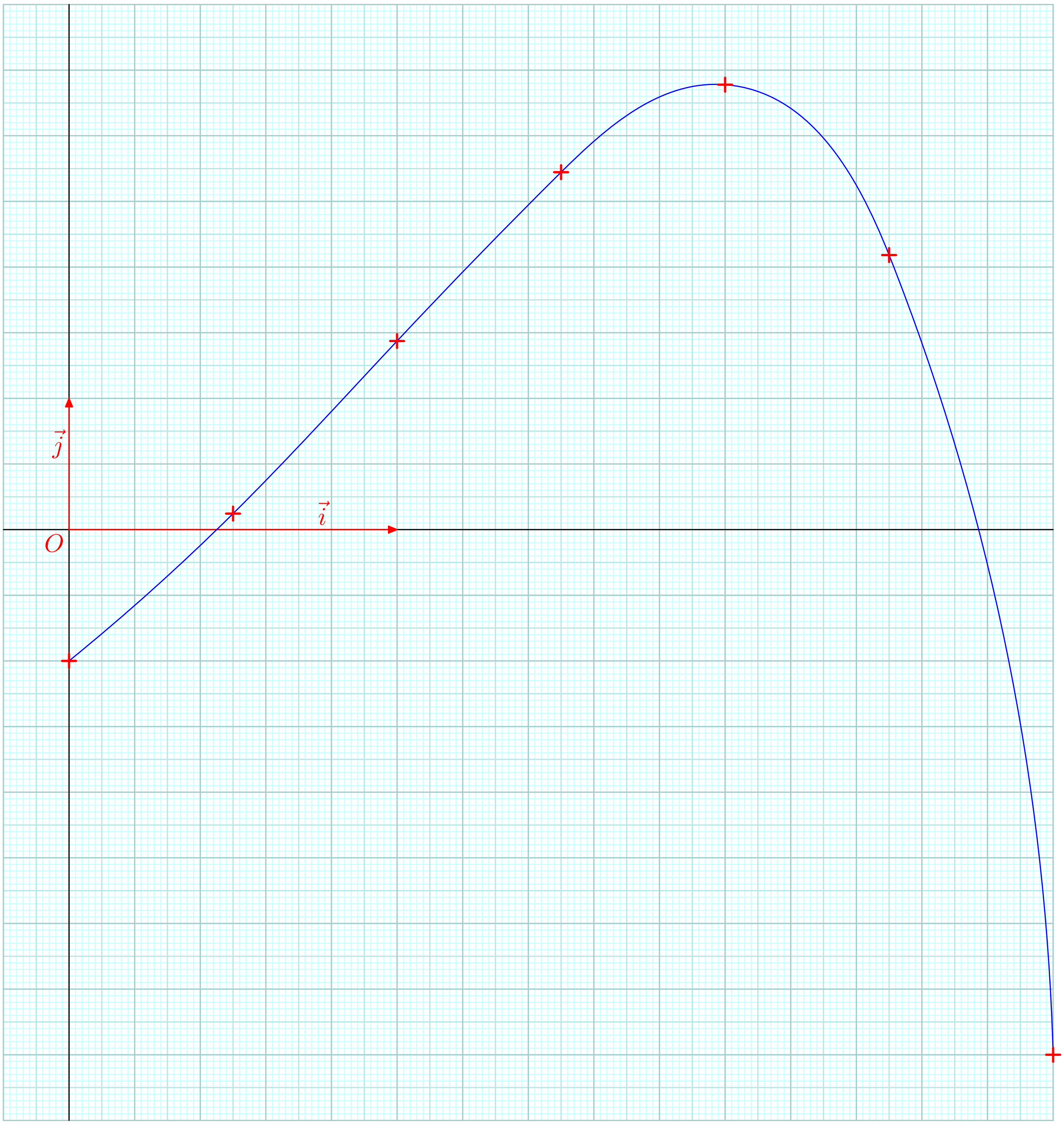


FIG. 1 – Bénéfice en fonction des quantités produites et vendues

La courbe représentative de $B$ coupe l'axe des abscisses à $2,2\,cm$ et $13,8\,cm$ de l'origine, c'est à dire à l'abscisse $\frac{2,2}{5} = 0,4$ et à l'abscisse $\frac{13,8}{5} = 2,7$.

C'est donc pour une quantité produite et vendue comprises entre $0,4$ et $2,7$ tonnes de produit, que l'entreprise réalisera un gain.