Classe : TES1 Pour le 07/04/2004

MATHEMATIQUES Devoir maison N°4

PARTIE A - Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} + 6$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité 2 cm).

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Soit f' la fonction dérivée de f.
   (a) Vérifier que, pour tout x réel, on a $f'(x) = 15(x - 1,4)e^{-x}$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$.
   (c) Etablir le tableau de variation de f.
3. Représenter la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ pour x compris entre 0 et 7.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 4,5$, admet, entre 0 et 7, deux solutions α et β (on notera α la plus petite des deux solutions).
   (b) Donner la valeur arrondie de α à 10^{-2} près, en présentant brièvement la méthode utilisée.
   (c) Donner la valeur arrondie de β à 10^{-2} près.
   (d) Quel est l'ensemble des solutions, dans l'intervalle $[0; 7]$, de l'inéquation $f(x) \leq 4,5$?

PARTIE B - Application

La fonction f est la fonction coût marginal C_M de fabrication d'un produit.
x est exprimé en tonnes (x compris entre 0 et 7), et le coût est exprimé en milliers d'euros.

1. (a) Pour quelle production le coût marginal est-il minimum et quel est ce prix ?
   (b) Pour quelles productions le coût marginal est-il inférieur à 4,5 (on donnera chacune des bornes de l'intervalle à 10^{-2} près) ?
2. La fonction coût total C_T est une primitive de la fonction coût marginal.
   (a) Soient g et h les fonctions définies sur $[0; 7]$ par :
   $$g(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = (ax + b)e^{-x}.$$
   h' étant la fonction dérivée de h, calculer $h'(x)$ et déterminer a et b pour que h soit une primitive de g.
   (b) En déduire que $C_T(x) = (15x + 9)e^{-x} + 6x + k$.
   (c) Déterminer k sachant que les frais fixes s'élèvent à 2000 euros (c'est à dire que $C_T(0) = 2$).

Correction du devoir maison N°4

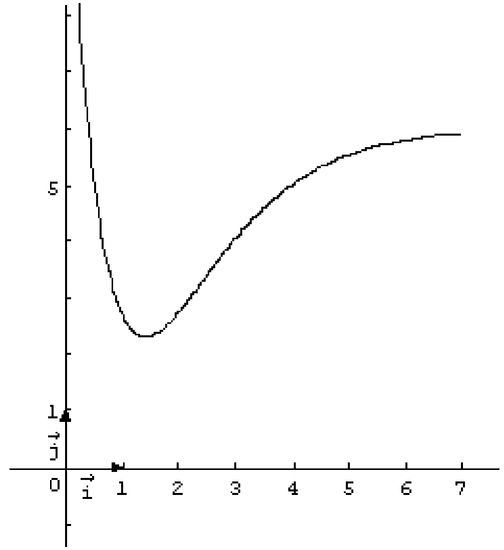
PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} + 6$.

1. (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 15(0,4 - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$
   donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
   (b) $f(x) = 6e^{-x} - 15xe^{-x} + 6$
   or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$
   et la droite d'équation $y = 6$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. (a) $f(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} + 6$
   $f(x) = u(x) \times v(x) + 6$ où $u(x) = 15(0,4 - x)$; $u'(x) = -15$
   $v(x) = e^{-x}$; $v'(x) = -e^{-x}$
   $f' = u'v + uv'$
   $f'(x) = -15e^{-x} + 15(0,4 - x)(-e^{-x}) = 15e^{-x}(-1 - 0,4 - x)$
   $f'(x) = 15(x - 1,4)e^{-x}$
   (b) or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $15e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est alors du signe de $x - 1,4$
   et $x - 1,4 > 0$ sur $]1,4; +\infty[$,
   donc $f'(x) > 0$ sur $]1,4; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 1,4[$.
   (c) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$1,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(1,4)$	$\nearrow$	6

   $f(1,4) = 15(0,4 - 1,4)e^{-1,4} + 6 = -15e^{-1,4} + 6$

3. 

4. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$
   - f est strictement décroissante sur $]0;1,4[$
     $f(0) = 12$ et $f(1,4) = -15e^{-1,4} + 6 < 4,5$
     donc l'équation $f(x) = 4,5$ admet une unique solution α sur $]0;1,4[$
   - f est strictement croissante sur $]1,4;7[$
     $f(1,4) < 4,5$ et $f(7) = 15(0,4-7)e^{-7} + 6 = -99e^{-7} + 6 > 4,5$
     donc l'équation $f(x) = 4,5$ admet une unique solution β sur $]1,4;7[$.

   (b) On a $f(0,5) \simeq 5,09$ et $f(0,6) \simeq 4,35$ d'où $\alpha \in]0,5;0,6[$
   de plus $f(0,57) \simeq 4,56$ et $f(0,58) \simeq 4,49$ donc $\alpha \simeq 0,58$

   (c) de même $f(3,4) \simeq 4,498$ et $f(3,41) \simeq 4,508$ donc $\beta \simeq 3,4$

   (d) D'après le tableau de variation de f, on obtient alors $f(x) \leq 4,5$ lorsque $x \in [\alpha;\beta]$.

PARTIE B

f est le coût marginal C_M de fabrication d'un produit.

1. (a) Le minimum de f est atteint pour $x = 1,4$. Donc le coût marginal est minimum pour une production de 1,4 tonne.
   $f(1,4) \simeq 2,3$, donc ce coût minimum est d'environ 2300€.

   (b) $f(x) \leq 4,5$ lorsque $x \in [\alpha;\beta]$
   donc le coût marginal est inférieur à 4,5 pour une production comprise entre 0,58 et 3,4 tonnes.

2. (a) h est une primitive de g sur $[0;7]$ signifie que $h'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0;7]$.
   $h(x) = (ax+b)e^{-x} = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = ax+b\,;\quad u'(x) = a$
   $v(x) = e^{-x}\;;\quad v'(x) = -e^{-x}$
   $h' = u'v + uv'$
   $h'(x) = ae^{-x} + (ax+b)(-e^{-x}) = e^{-x}(a - ax - b) = (-ax + a - b)e^{-x}$
   on veut $h'(x) = g(x) = (6-15x)e^{-x}$ pour tout $x \in [0;7]$
   on obtient alors $-15 = -a$, d'où $a = 15$
   et $a - b = 6$, ce qui donne $b = 9$
   Donc $h(x) = (15x+9)e^{-x}$

   (b) C_T est une primitive de C_M et $C_M(x) = g(x) + 6$
   une primitive de g sur $[0;7]$ est h et une primitive de la fonction $x \longmapsto 6$ sur $[0;7]$ est la fonction $x \longmapsto 6x$
   Donc les primitives de C_M sur $[0;7]$ sont les fonctions C_T de la forme :
   $C_T(x) = h(x) + 6x + k = (15x+9)e^{-x} + 6x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

   (c) On a de plus $C_T(0) = 2$ et $C_T(0) = (15 \times 0 + 9)e^{-0} + 6 + k = 9 + k$
   d'où $2 = 9 + k$ et $k = -7$, ce qui donne $C_T(x) = (15x+9)e^{-x} + 6x - 7$.