NOM : .... Prénom : ....

Classe : TES1 Le 21/05/2004

MATHEMATIQUES

Devoir N°6

Calculatrice autorisée Durée : 3h

Exercice 1: (5 *points*)

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un paquet de café en francs au 31 décembre de l'année $1900+x$.

Rang x_i de l'année	70	80	88	94	96	98	99	100
Prix y_i en francs	3	5,5	10	15,5	19,3	19,4	20	21

Sauf autre précision, tous les résultats et coefficients demandés seront arrondis à 10^{-3}.
Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i; y_i)$.
2. **Ajustement affine**
   (a) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de y en x.
   Tracer cette droite sur le graphique.
   (b) En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'à l'an 2002, donner une estimation du prix, en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.
   On rappelle qu'un euro vaut 6,55957 francs.
3. **Ajustement exponentiel**
   (a) Compléter sur cette feuille le tableau suivant où $z_i = \ln y_i$ (valeurs arrondies à 10^{-3}).

x_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	$1,099$	$1,705$	$2,303$		$2,960$			

   Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de z en x
   (b) En déduire l'ajustement : $y = 0,026e^{0,067x}$
   (c) En supposant que ce modèle exponentiel reste valable jusqu'en 2002, donner une estimation du prix en euros, arrondi au centime d'un paquet de café au 31/12/2002.

Exercice 2: (5 *points*)

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55% des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40% en sont locataires et enfin 5% occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit »).
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60% des propriétaires habitent une maison individuelle, 80% des locataires habitent un appartement et enfin 10% des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :
- A l'événement :« La famille habite un appartement » ;
- L l'événement :« La famille est locataire » ;
- P l'événement :« La famille est propriétaire » ;
- G l'événement :« La famille est occupant à titre gratuit ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.
Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième.

1. (a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p_P(\overline{A})$, $p_L(A)$ et $p_G(\overline{A})$.
   (b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement :« La famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement.
   Calculer la probabilité pour qu'elle en soit propriétaire.
5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.
   (a) Calculer la probabilité qu'aucune des trois familles interrogées n'habite un appartement.
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins une de ces familles habite un appartement.

Exercice 3: (3 *points*)

– Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point.
– Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
– Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
– Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

A chaque question, répondre en cochant une seule case.

1° Pour tout x réel, e^x est strictement positif.	Vrai Faux	☐ ☐
2° Pour tout $x > 0$, $\ln x$ est strictement positif.	Vrai Faux	☐ ☐
3° a et b étant des réels quelconques, indiquer parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**	$e^{a\times b} = e^a + e^b$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$	☐ ☐ ☐
4° Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$	☐ ☐
5° Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$	☐ ☐
6° L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)^2 + \ln x < 0$ est :	$]e^{-1}; 1[$ $]0; e^{-1}[$	☐ ☐

Exercice 4: (7 *points*)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 100(2x-5)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE A - Etude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x) = 100\left(\dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{5}{e^x}\right)$ et on rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$).
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[2;8]$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ dont les unités sont : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B - Calcul d'une intégrale

1. Justifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = 100(-2x+3)e^{-x}$, est une primitive de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx$.

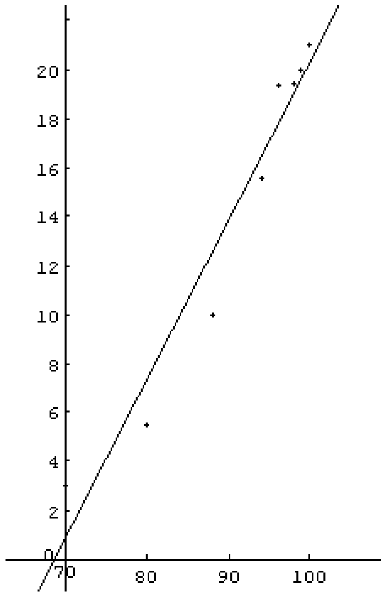
PARTIE C - Application

Le nombre $f(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces (pour x compris entre 2 et 8). Par exemple, si l'entreprise fabrique 300 pièces, elle réalise un bénéfice de $1000f(3)$ euros.

1. En utilisant si nécessaire la courbe $\mathcal{C}_f$ ou les résultats de la partie A, déterminer en justifiant :
   (a) Les quantités à produire pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.
   (b) La quantité de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximum. Préciser ce bénéfice à l'euro près.
   (c) Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 5000 euros.
2. Lorsque la production varie entre 300 et 600 pièces, le bénéfice moyen en milliers d'euros est donné par la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[3;6]$. Déterminer une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce bénéfice moyen.

Correction du DST 6

Exercice 1:

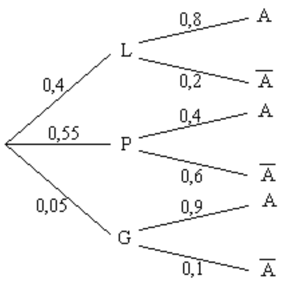
1. 

2. (a) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y = ax + b$ où $a \simeq 0,648$ et $b \simeq -44,503$.
   pour $x = 70$, $y = 0,857$
   pour $x = 100$, $y = 20,297$
   On peut alors tracer la droite.
   (b) Pour $x = 102$, $y \simeq 21,593$ et $\dfrac{21,593}{6,55957} \simeq 3,29$
   Donc au 31/12/2002, on peut estimer le prix d'un paquet de café à 3,29€.
3. (a)

x_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	1,099	1,705	2,303	2,741	2,960	2,965	2,996	3,045

   Par la méthode des moindre carrés, une équation de la droite d'ajsutement de z en x est : $z = a'x + b'$ où $a' \simeq 0,067$ et $b' \simeq -3,638$
   (b) On a $z = 0,067x - 3,638$ c'est à dire $\ln y = 0,067x - 3,638$ d'où $y = e^{0,067x-3,638}$ et $y = e^{0,067x}e^{-3,638}$ donc $y = 0,026e^{0,067x}$
   (c) Pour $x = 102$, $y \simeq 24,151$ et $\dfrac{24,151}{6,55957} \simeq 3,68$
   Avec ce nouvel ajustement, on peut estimer au 31/12/2002 le prix d'un paquet de café à 3,68€.

Exercice 2:

1. (a) On a : $p_P(\overline{A}) = \dfrac{60}{100} = 0,6$; $p_L(A) = \dfrac{80}{100} = 0,8$; $p_G(\overline{A}) = \dfrac{10}{100} = 0,1$
   (b) 

2. On cherche $p(P \cap A)$
   $p(P \cap A) = p_P(A) \times p(P) = 0,4 \times 0,55 = 0,22$
3. D'après la formule des probabilités totales :
   $p(A) = p(A \cap L) + p(A \cap G) + p(A \cap P) = p_L(A) \times p(L) + p_G(A) \times p(G) + 0,22$
   $p(A) = 0,8 \times 0,4 + 0,9 \times 0,05 + 0,22 = 0,32 + 0,045 + 0,22 = 0,585.$

4. On cherche $p_A(P)$
$p_A(P) = \dfrac{p(A \cap P)}{p(A)} = \dfrac{0,22}{0,585} \simeq 0,376$
5. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.
   (a) La probabilité qu'aucune des trois familles n'habite un appartement est $(p(\overline{A}))^3$
   où $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0,415$
   Donc la probabilité cherchée est : $0,415^3 \simeq 0,071$
   (b) La probabilité qu'au moins une de ces familles habite un appartement est $1 - (p(\overline{A}))^3 \simeq 0,929$.

Exercice 3:

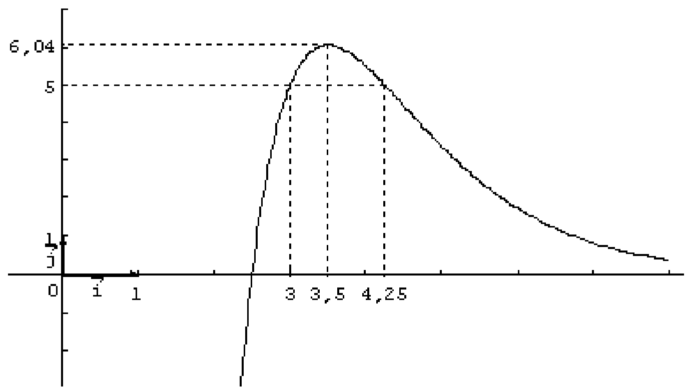
1° Pour tout x réel, e^x est strictement positif.	Vrai Faux	☒ ☐
2° Pour tout $x > 0$, $\ln x$ est strictement positif.	Vrai Faux	☐ ☒
3° a et b étant des réels quelconques, indiquer parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**	$e^{a\times b} = e^a + e^b$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$	☒ ☐ ☐
4° Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$	☐ ☒
5° Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$	☐ ☒
6° L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)^2 + \ln x < 0$ est :	$]e^{-1}; 1[$ $]0; e^{-1}[$	☒ ☐

Exercice 4:
f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 100(2x-5)e^{-x}$.
PARTIE A

1. $f(x) = 100\left(\dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{5}{e^x}\right)$
   or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = 2x - 5\,;\quad u'(x) = 2$
   $v(x) = e^{-x}\,;\quad v'(x) = -e^{-x}$
   $f' = 100(u'v + uv')$
   $f'(x) = 100(2e^{-x} + (2x-5)(-e^{-x})) = 100e^{-x}(2 - 2x + 5) = 100(-2x+7)e^{-x}$
   or $100e^{-x} > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 7$
   et $-2x + 7 > 0$ donne $x < \dfrac{7}{2}$
   donc $f'(x) > 0$ sur $\left[0; \dfrac{7}{2}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{7}{2}; +\infty\right[$
   tableau de variation de f :

x	0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-500	↗	$f\left(\frac{7}{2}\right)$	↘	0

   $f(0) = 100(2\times 0 - 5)e^{-0} = -500$ et $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 100\left(2\times\dfrac{7}{2} - 5\right)e^{-\frac{7}{2}} = 200e^{-\frac{7}{2}}$

3. 

PARTIE B

1. F est définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=100(-2x+3)e^{-x}$
   $F(x)=100u(x)\times v(x)$ où $u(x)=-2x+3$; $u'(x)=-2$
   $v(x)=e^{-x}$; $v'(x)=-e^{-x}$
   $F'=100(u'v+uv')$
   $F'(x)=100(-2e^{-x}+(-2x+3)(-e^{-x}))=100e^{-x}(-2+2x-3)=100e^{-x}(2x-5)=f(x)$
   donc F est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
2. On a alors $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx=F(6)-F(3)=100(-2\times 6+3)e^{-6}-100(-2\times 3+3)e^{-3}=-900e^{-6}+300e^{-3}$.

PARTIE C

1. (a) L'entreprise ne travaille pas à perte lorsqu'elle réalise des bénéfices, c'est à dire lorsque $f(x)>0$
   On a alors : $x>2,5$ d'après la courbe représentant f.
   Donc l'entreprise ne travaille pas à perte à partir de 2500 pièces produites.
   (b) $f(x)$ est maximum pour $x=3,5$
   Donc le bénéfice est maximum pour 3500 pièces produites et il vaut $1000f(3,5)\simeq 6040$ euros.
   (c) $f(x)\geq 5$ nous donne $3\leq x\leq 4,25$ d'après la courbe, donc pour que le bénéfice soit d'au-moins 5000 euros, il faut que le nombre de pièces produites soit entre 300 et 450.
2. On calcule $\displaystyle\frac{1}{6-3}\int_3^6 f(x)\,dx=\frac{1}{3}(-900e^{-6}+300e^{-3})\simeq 4,235$.
   Donc le bénéfice moyen lorsque la production varie entre 300 et 600 pièces est environ de 4235€.