Classe : TES1 Le 05/05/2004

NOM : .... Prénom :..

MATHEMATIQUES

Interrogation N°5

Calculatrice autorisée Durée : 2h

Exercice 1: (5 *points*)

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.

Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

1. (a) Représenter dans un repère orthonormal le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.

   (b) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2. (a) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé par les points M_1, M_2 et M_3, puis les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé par les points M_4, M_5 et M_6.

   (b) Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et déterminer, avec des coefficients arrondis à 10^{-2}, une équation de la droite (G_1G_2).

   (c) En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2004.

3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1125.

   (a) Ajouter le point $M_7(7; 1125)$ sur le graphique précédent.

   (b) On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i, $2 \leq i \leq 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est plus pris en compte).

   Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

   (c) En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2004 ?

Exercice 2: (4 *points*)

Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c.

Le candidat doit indiquer pour chacune d'elles, sur la copie, l'affirmation exacte en indiquant la lettre correspondante. Il n'y a qu'une affirmation exacte par question.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté, une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions ; elles ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-x} + x + 5$. Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

   a) $y = -x + 7$ **b)** $y = 3x + 7$ **c)** $y = 7x - 1$

2. On considère une fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

   On pose $h(x) = e^{g(x)}$.

x	5		7
g	-3	$\nearrow$	1

   a) h n'est pas définie sur $[5; 7]$;

   b) h est strictement décroissante sur $[5; 7]$;

   c) h est strictement croissante sur $[5; 7]$.

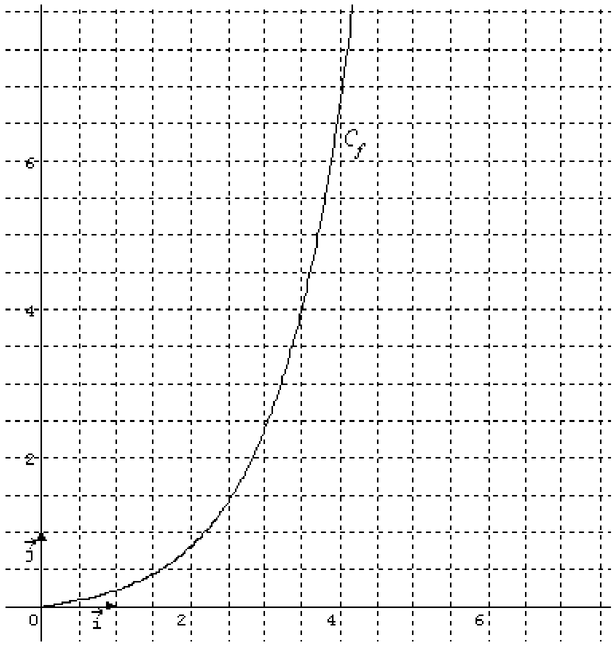
3. L'ensemble des solutions de la double inéquation $-1 < e^x < 8$ est l'intervalle :
   a) $]0; 3\ln 2[$; **b)** $]-\infty; 3\ln 2[$; **c)** $]\ln 8; +\infty[$.
4. u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (2x+3)e^{2x^2+6x+1}$.
   Une primitive U de u sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   a) $U(x) = 2e^{2x^2+6x+1} - 1$ **b)** $U(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x^2+6x+1} + 3$ **c)** $U(x) = (x^2+3x)e^{2x^2+6x+1}$

<u>Exercice 3:</u> (6 *points*)

La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée f et une fonction demande notée g.

Elles sont définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{8}$ et $g(x) = \dfrac{120}{e^x + 15}$,
où x représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité x offerte, et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité x demandée.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne respectivement par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre.



Etude de la fonction demande. Détermination de la quantité échangée et du prix d'équilibre du marché

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
2. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   Justifier que $g'(x) = -\dfrac{120e^x}{(e^x + 15)^2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g sur $[0; +\infty[$.
4. (a) Compléter, sur cette feuille, le tableau de valeurs (arrondir les résultats à 10^{-1}).

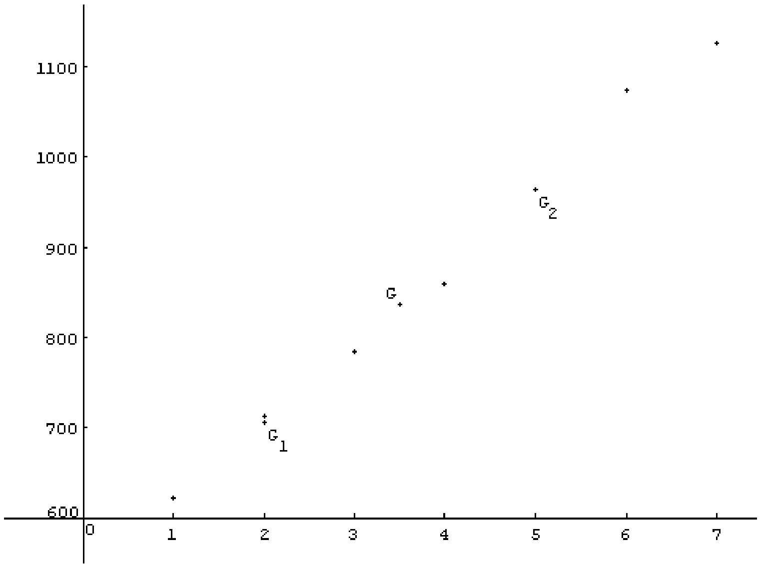
x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$										

   (b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
   (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ et la tangente T sur le graphique.
5. On admet que sur l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique notée q, appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant.
   (a) Faire apparaître sur le graphique les valeurs p et q.
   (b) Vérifier que $q = \ln 25$.
   En déduire la valeur de p.

Correction de l'interrogation N°5

Exercice 1:

PARTIE A



1. (a)
   (b) Le point G a pour coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$ où $\overline{x} = 3,5$ et $\overline{y} \simeq 836,17$.
2. (a) Le point G_1 a pour coordonnées $(2;706,67)$ et G_2 a pour coordonnées $(5;965,67)$.
   (b) Une équation de (G_1G_2) est de la forme $y = ax + b$
   où $a = \dfrac{y_{G_1} - y_{G_2}}{x_{G_1} - x_{G_2}} = \dfrac{706,67 - 965,67}{2-5} = \dfrac{259}{3} \simeq 86,33$. On a alors $y = 96,33x + 6$
   De plus $G_1(2;706,67)$ est sur cette droite, alors : $706,67 = 2 \times 86,33 + b$ donc $b \simeq 534$.
   Donc une équation de (G_1G_2) est $y = 86,33x + 534$.
3. (a)
   (b) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x est : $y = ax + b$
   où $a \simeq 86,657$ et $b \simeq 529,876$
   (c) Pour $x = 9$, $y = 86,657 \times 9 + 529,876 \simeq 1310$
   Avec ce nouvel ajustement, on prévoit 1310 apareils en 2004.

Exercice 2:

1. Réponse : a)
2. Réponse : c)
3. Réponse : b)
4. Réponse : b)

Exercice 3:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 15 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
   et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. $g(x) = 120 \times \dfrac{1}{e^x + 15} = 120 \times \dfrac{1}{u(x)}$ où $u(x) = e^x + 15$; $u'(x) = e^x$
   $$g' = 120 \times \left(-\frac{u'}{u^2}\right)$$
   $$g'(x) = -120 \times \frac{e^x}{(e^x+15)^2} = -\frac{120e^x}{(e^x+15)^2}$$
3. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(e^x + 15)^2 > 0$ alors $\dfrac{120e^x}{(e^x+15)^2} > 0$
   donc $g'(x) < 0$ sur $[0;+\infty[$, et g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

   Tableau de variation de g :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
g	7,5 $\searrow$ 0

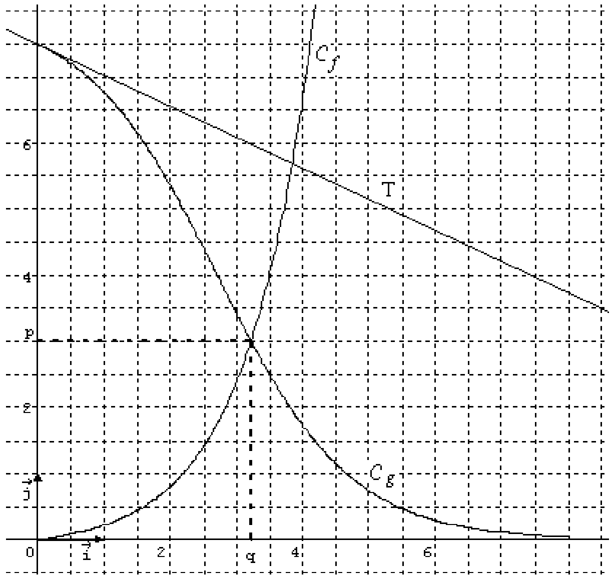
   $$g(0) = \frac{120}{e^0 + 15} = \frac{120}{16} = 7,5$$

4. (a)

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$	7,5	7,2	6,8	5,4	3,4	2,5	1,7	0,7	0,3	0,1

(b) le coefficient directeur de T est : $g'(0) = -\dfrac{120e^0}{(e^0+15)^2} = -\dfrac{120}{16^2} = -\dfrac{15}{32}$

(c)



5. $f(\ln 25) = \dfrac{e^{\ln 25} - 1}{8} = \dfrac{25-1}{8} = 3$ $\qquad g(\ln 25) = \dfrac{120}{e^{\ln 25}+15} = \dfrac{120}{25+15} = 3$

donc $f(\ln 25) = g(\ln 25)$ et $q = \ln 25$. On obtient alors $p = f(q) = g(q) = 3$.