La maison d'École

Amortissement d'un emprunt
Classe de terminale ES

Suites géométriques, fonction exponentielle

‘

L'objectif de cet exercice est de construire le tableau d'amortissement d'un emprunt. Cette problématique est assez ordinaire dans la vie courante, mais le mode de calcul des annuités, des intérêts, des amortissements reste toujours un peu mystérieux. Faire soit même le calcul, c'est rendre intelligible les principes de l'actualisation, de l'amortissement, c'est comprendre l'importance des taux, et des durées.

Énoncé

Ce qui est demandé

Pour acheter une voiture dont le prix est 23 000 €, j'emprunte 18 000 € à ma banque. Celle ci m'accorde un prêt avec les conditions suivantes :

- Durée : 4 ans
- Taux : 6,7% (TEG)
- Mensualités de remboursement constantes.

Calculer le montant des mensualités et dresser un tableau d'amortissement du prêt.

Les étapes du travail

Calcul de la mensualité de remboursement

1. Les remboursements étant mensuels, il est prudent de calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de l'emprunt.
2. Calculer la somme S qu'il faudrait rembourser à l'échéance du prêt s'il n'y avait pas de remboursements échelonnés.
3. Soit m le montant de la mensualité de remboursement. Déterminer la somme S_1 à déduire de S du fait que la $1^{\text{ère}}$ mensualité a été remboursée à la fin du 1^{er} mois, qu'elle n'est plus due depuis cette date, et qu'elle n'a pas produit d'intérêt depuis cette date.

4. De la même façon, pour chaque mensualité de remboursement, calculer la déduction qu'il convient d'opérer sur S, du fait de ce remboursement. Montrer que ces déductions forment une suite géométrique dont on calculera la raison.
5. À l'échéance des quatre années, il ne restera que la dernière mensualité à verser. On aura donc :
$$m = S - S_1 - S_2 - S_3 - \cdots - S_{47}$$
En déduire la valeur de m.

Tableau d'amortissement

Le mensualités étant versées, elles contiennent toutes une part de remboursement du capital emprunté (ce qu'on appelle l'amortissement), et une part d'intérêts.

Le prêteur considère qu'à chaque fin de mois, l'emprunteur lui paye les intérêts sur la somme dont il a pu disposer durant le mois écoulé (de son point de vue, c'est bien normal). Au début, les sommes dues sont importantes, les intérêts aussi ; à la fin, l'emprunteur ne doit presque plus rien, les intérêts sont donc très faibles et l'amortissement plus important.

Mois après mois, on peut donc calculer, au fil des remboursements, les intérêts versés, et l'amortissement du capital réalisé. Si pour une raison ou une autre, il faut interrompre le processus, (échéance impayée, décès de l'emprunteur. . .) on est capable de dire ce qui reste dû et ce qui est amorti. Produire ces calculs, c'est réaliser un tableau d'amortissement.

1. Pour la première mensualité de remboursement, calculer le capital amorti et l'intérêt versé.
2. Dresser, à l'aide des résultats obtenus, le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Corrigé

Calcul de la mensualité de remboursement

Taux mensuel équivalent

Il s'agit de calculer le taux d'intérêt mensuel t_m qui produirait au bout d'une année les mêmes intérêts qu'un taux annuel de 6,7%, les intérêts étant calculés et ajoutés au capital à chaque fin de mois.

Au bout d'une année, l'intérêt produit par un taux annuel égal à 0,067, dépend du capital C :

$$I = C \times 0,067$$

Au bout de cette même année, les intérêts produits par un taux mensuel t_m sont aussi fonction du capital :

$$I = C(1 + t_m)^{12} - C$$

Pour que les taux mensuels et annuels soient équivalents, on doit donc avoir :

$$C \times 0,067 = C(1 + t_m)^{12} - C$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} C \times 0,067 + C &= C(1 + t_m)^{12} \\ 1,067\,C &= C(1 + t_m)^{12} \\ 1,067 &= (1 + t_m)^{12} \end{aligned}$$

Selon la définition exponentielle de la puissance, on peut donc écrire :

$$1,067 = e^{12 \ln(1+t_m)}$$

ou encore, logarithme et exponentielleétant des fonctions réciproques :

$$\ln(1,067) = 12 \ln(1 + t_m)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(1 + t_m) &= \frac{\ln(1,067)}{12} \\ 1 + t_m &= e^{\frac{1}{12} \ln 1,067} \\ t_m &= e^{\frac{1}{12} \ln 1,067} - 1 \end{aligned}$$

Ce dernier résulat est aussi susceptible de s'écrire : $t_m = 1,067^{\frac{1}{12}} - 1$

La calcul s'effectuant à la calculette sous une forme ou une autre, on obtient :

$$t_m = 0,005\,418\,877$$

Somme à rembourser, sans mensualités échelonnées

S'il n'y a pas de remboursement, durant la durée totale du prêt, le capital, et les intérêts qu'il a produits, sont entièrement dus à à l'échéance. Le taux est 0.067 annuel, avec une capitalisation des intérêts annuelle (les intérêts de l'année sont ajoutés au capital et produisent eux-même des intérêts l'année suivante).

Au bout de quatre années la somme à rembourser serait donc :

$$S = 18\,000 \times 1,067^4 = 23\,330,83\,€$$

On peut déterminer cette somme, en utilisant le taux mensuel, avec une capitalisation mensuelle des intérêts :

$$S = 18\,000 \times 1,005\,418\,877^{48}c = 23\,330,83\,€$$

Calcul de S_1

En remboursant la mensualité m à la fin du premier mois, je diminue ma dette. Cette somme m, si elle n'avait pas été remboursée, aurait produit des intérêts sur une durée de 47 mois. Sa valeur, en fin d'échéance du prêt, aurait donc été :

$$S_1 = m \times (1 + t_m)^{47} = m \times 1,005\,418\,877^{47}$$

Cette valeur, puisque je rembourse m à la fin du premier mois est donc à soustraire de la somme S due à l'échéance du prêt.

Calcul de S_2, $S_3 \cdots$

La deuxième mensualité m est versée en fin de deuxième mois. Si elle ne l'avait pas été, sa valeur à l'échéance des quatre années aurait été :

$$S_2 = m(1 + t_m)^{46}$$

S_2 devra donc être soustraite de S au moment du remboursement final.

Il en sera de même de $S_3 = m(1 + t_m)^{45}$, $S_4 = m(1 + t_m)^{44}$, $S_5 = m(1 + t_m)^{44} \cdots$

La 47$^{\text{e}}$ mensualité, ne représente, dans S, que $S_{47} = m(1 + t_m)$.

Les sommes S_n à déduire de S pour calculer le remboursement final forment une suite géométrique de raison $(1 + t_m)$ et de premier terme $m(1 + t_m)$.

Calcul de m

On sait, puisque les mensualités sont égales, que la dernière mensualité sera, elle aussi, m. Elle représentera ce qu'il restera à rembourser à l'échéance finale du prêt.

On peut donc écrire :

$$m = S - S_1 - S_2 - S_3 - \cdots - S_{47}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} S &= m + S_{47} + S_{46} + \cdots + S_3 + S_2 + S_1 \\ &= m + m(1+t_m) + \cdots + m(1+t_m)^{46} + m(1+t_m)^{47} \end{aligned}$$

On constate que S est la somme des 48 premiers termes d'une suite géométrique de terme initial m et de raison $(1+t_m)$. Nous savons que :

$$\sum_0^n (u_0\, r^k) = u_0\, \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} S &= m\,\frac{(1+t_m)^{48}-1}{(1+t_m)-1} \\ &= m\,\frac{(1+t_m)^{48}-1}{t_m} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$m = \frac{S}{\frac{(1+t_m)^{48}-1}{t_m}} = \frac{t_m \times S}{(1+t_m)^{48}-1} = \frac{0,005\,418\,877 \times 23\,330,83}{1,005\,418\,877^{48}-1} = 426,89\,€$$

Tableau d'amortissement

Si l'on considère que durant le premier mois, je dispose de 18 000 €, les interêts sur cette somme représentent à la fin du mois :

$$I_1 = 18\,000 \times t_m = 97,54\,€$$

La première mensualité que je verse à mon prêteur se décompose donc en

– un versement d'intérêt de $97,54\,€$
– un amortissement de mon emprunt de $426,89 - 97,54 = 329,35\,€$

Ce versement réalisé, il ma dette sera : $18\,000 - 329,35 = 17\,670,65\,€$

C'est la somme qui me sera prêtée, en réalité, durant le deuxième mois.

À l'aide d'un tableur, je peux généraliser ce calcul, mois par mois :

– Dans la colonne A, on indique les dates des 48 échéances mensuelles.
– Dans la colonne B, on indique le montant de toutes les mensualités.
– La cellule F4 contient le montant du prêt.
– La cellule C5 contient $F4 \times t_m$.
– La cellule D5 contient B5-C5.
– La cellule E5 contient D5+E4.
– La cellule F5 contient F4-D5.

Il suffit de recopier la ligne 5, 47 fois pour obtenir le tableau.

EX03.xls

	A	B	C	D	E	F
2						
3	**Date**	**Mensualité**	**Intérêt**	**Amortissement**	**Emprunt amorti**	**Reste dû**
4	09/03/04					18 000,00 €
5	09/04/04	426,89 €	97,54 €	329,35 €	329,35 €	17 670,65 €
6	09/05/04	426,89 €	95,76 €	331,13 €	660,48 €	17 339,52 €
7	09/06/04	426,89 €	93,96 €	332,93 €	993,41 €	17 006,59 €
8	09/07/04	426,89 €	92,16 €	334,73 €	1 328,14 €	16 671,86 €
9	09/08/04	426,89 €	90,34 €	336,55 €	1 664,69 €	16 335,31 €
10	09/09/04	426,89 €	88,52 €	338,37 €	2 003,06 €	15 996,94 €
11	09/10/04	426,89 €	86,69 €	340,20 €	2 343,26 €	15 656,74 €
12	09/11/04	426,89 €	84,84 €	342,05 €	2 685,31 €	15 314,69 €
13	09/12/04	426,89 €	82,99 €	343,90 €	3 029,21 €	14 970,79 €
14	09/01/05	426,89 €	81,12 €	345,77 €	3 374,98 €	14 625,02 €
15	09/02/05	426,89 €	79,25 €	347,64 €	3 722,62 €	14 277,38 €
16	09/03/05	426,89 €	77,37 €	349,52 €	4 072,14 €	13 927,86 €
17	09/04/05	426,89 €	75,47 €	351,42 €	4 423,56 €	13 576,44 €
18	09/05/05	426,89 €	73,57 €	353,32 €	4 776,88 €	13 223,12 €
19	09/06/05	426,89 €	71,65 €	355,24 €	5 132,12 €	12 867,88 €
20	09/07/05	426,89 €	69,73 €	357,16 €	5 489,28 €	12 510,72 €

Feuil1 Feuil2 Feuil3

Date	Mensualité	Intérêt	Amortissement	Emprunt amorti	Reste dû
09/03/04					18 000,00 €
09/04/04	426,89 €	97,54 €	329,35 €	329,35 €	17 670,65 €
09/05/04	426,89 €	95,76 €	331,13 €	660,48 €	17 339,52 €
09/06/04	426,89 €	93,96 €	332,93 €	993,41 €	17 006,59 €
09/07/04	426,89 €	92,16 €	334,73 €	1 328,14 €	16 671,86 €
09/08/04	426,89 €	90,34 €	336,55 €	1 664,69 €	16 335,31 €
09/09/04	426,89 €	88,52 €	338,37 €	2 003,06 €	15 996,94 €
09/10/04	426,89 €	86,69 €	340,20 €	2 343,26 €	15 656,74 €
09/11/04	426,89 €	84,84 €	342,05 €	2 685,31 €	15 314,69 €
09/12/04	426,89 €	82,99 €	343,90 €	3 029,21 €	14 970,79 €
09/01/05	426,89 €	81,12 €	345,77 €	3 374,98 €	14 625,02 €
09/02/05	426,89 €	79,25 €	347,64 €	3 722,62 €	14 277,38 €
09/03/05	426,89 €	77,37 €	349,52 €	4 072,14 €	13 927,86 €
09/04/05	426,89 €	75,47 €	351,42 €	4 423,56 €	13 576,44 €
09/05/05	426,89 €	73,57 €	353,32 €	4 776,88 €	13 223,12 €
09/06/05	426,89 €	71,65 €	355,24 €	5 132,12 €	12 867,88 €
09/07/05	426,89 €	69,73 €	357,16 €	5 489,28 €	12 510,72 €
09/08/05	426,89 €	67,79 €	359,10 €	5 848,38 €	12 151,62 €
09/09/05	426,89 €	65,85 €	361,04 €	6 209,42 €	11 790,58 €
09/10/05	426,89 €	63,89 €	363,00 €	6 572,42 €	11 427,58 €
09/11/05	426,89 €	61,92 €	364,97 €	6 937,39 €	11 062,61 €
09/12/05	426,89 €	59,95 €	366,94 €	7 304,33 €	10 695,67 €
09/01/06	426,89 €	57,96 €	368,93 €	7 673,26 €	10 326,74 €
09/02/06	426,89 €	55,96 €	370,93 €	8 044,19 €	9 955,81 €
09/03/06	426,89 €	53,95 €	372,94 €	8 417,13 €	9 582,87 €
09/04/06	426,89 €	51,93 €	374,96 €	8 792,09 €	9 207,91 €
09/05/06	426,89 €	49,90 €	376,99 €	9 169,08 €	8 830,92 €
09/06/06	426,89 €	47,85 €	379,04 €	9 548,12 €	8 451,88 €
09/07/06	426,89 €	45,80 €	381,09 €	9 929,21 €	8 070,79 €
09/08/06	426,89 €	43,73 €	383,16 €	10 312,37 €	7 687,63 €
09/09/06	426,89 €	41,66 €	385,23 €	10 697,60 €	7 302,40 €
09/10/06	426,89 €	39,57 €	387,32 €	11 084,92 €	6 915,08 €
09/11/06	426,89 €	37,47 €	389,42 €	11 474,34 €	6 525,66 €
09/12/06	426,89 €	35,36 €	391,53 €	11 865,87 €	6 134,13 €
09/01/07	426,89 €	33,24 €	393,65 €	12 259,52 €	5 740,48 €
09/02/07	426,89 €	31,11 €	395,78 €	12 655,30 €	5 344,70 €
09/03/07	426,89 €	28,96 €	397,93 €	13 053,23 €	4 946,77 €
09/04/07	426,89 €	26,81 €	400,08 €	13 453,31 €	4 546,69 €
09/05/07	426,89 €	24,64 €	402,25 €	13 855,56 €	4 144,44 €
09/06/07	426,89 €	22,46 €	404,43 €	14 259,99 €	3 740,01 €
09/07/07	426,89 €	20,27 €	406,62 €	14 666,61 €	3 333,39 €
09/08/07	426,89 €	18,06 €	408,83 €	15 075,44 €	2 924,56 €
09/09/07	426,89 €	15,85 €	411,04 €	15 486,48 €	2 513,52 €
09/10/07	426,89 €	13,62 €	413,27 €	15 899,75 €	2 100,25 €
09/11/07	426,89 €	11,38 €	415,51 €	16 315,26 €	1 684,74 €
09/12/07	426,89 €	9,13 €	417,76 €	16 733,02 €	1 266,98 €
09/01/08	426,89 €	6,87 €	420,02 €	17 153,04 €	846,96 €
09/02/08	426,89 €	4,59 €	422,30 €	17 575,34 €	424,66 €
09/03/08	426,89 €	2,30 €	424,59 €	17 999,93 €	0,07 €