Classe : TES1 Le 06/05/2003

MATHEMATIQUES

Devoir N°7

Calculatrice et formulaire autorisés Durée : 3h

Exercice 1: (5 *points*)

Une statistique publiée en l'an 1998 donne le nombre d'abonnés à Internet dans le monde, à la fin de l'année indiquée :

Année	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i; y_i)$.
   (*Prévoir sur l'axe des y des graduations jusqu'à 500.*)
2. Des prévisions ont été réalisées pour les années 1999, 2000 et 2001 à l'aide d'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   (a) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, les coefficients arrondis au dixième. Tracer cette droite sur le graphique.
   (b) Calculer avec cet ajustement les prévisions p, q et r du nombre d'abonnés à Internet pour les années 1999, 2000 et 2001.
3. Le nombre d'abonnés à Internet pour les années 1999 et 2000 est maintenant connu, on obtient le nouveau tableau :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150	248	407

   (a) Placer les nouveaux points sur le graphique. L'ajustement choisi à la question **2.** ne paraît plus pertinent ; on essaie donc un autre ajustement.
   (b) Pour cela, on pose $z = \ln(y)$.
   Calculer, arrondies au centième, les valeurs $z_i = \ln(y_i)$ pour i entier variant de 0 à 5, et les présenter dans un tableau.
   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, les coefficients étant arrondis au centième.
   (c) En déduire l'ajustement : $y = 30e^{0,53x}$.
   (d) Calculer avec cet ajustement la nouvelle prévision r' pour l'année 2001.
   Quelle serait, avec ce deuxième ajustement, la prévision pour 2002 en millions d'abonnés ?

Exercice 2: (5 *points*)

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.
La notation $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat.
   On considère les événements suivants :
   G :« Le client achète une tablette gagnante » ;
   U :« Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
   D :« Le client gagne exactement deux places de cinéma ».
   (a) Donner $p(G)$, $p_G(U)$ et $p_G(D)$.
   (b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
   (c) Soit X le nombre de places de cinéma gagnées par le client.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de la loi de X.
2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.
   (a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
   (b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
   (c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29
   (on pourra s'aider d'un arbre).

<u>Problème :</u> (10 *points*)

PARTIE A - Etude de la fonction g.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. Résoudre $g'(x) > 0$.
3. En déduire le tableau de variation de g (l'étude des limites n'est pas demandée).
4. Après avoir calculé $g(0)$, donner le signe de g pour $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE B - Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

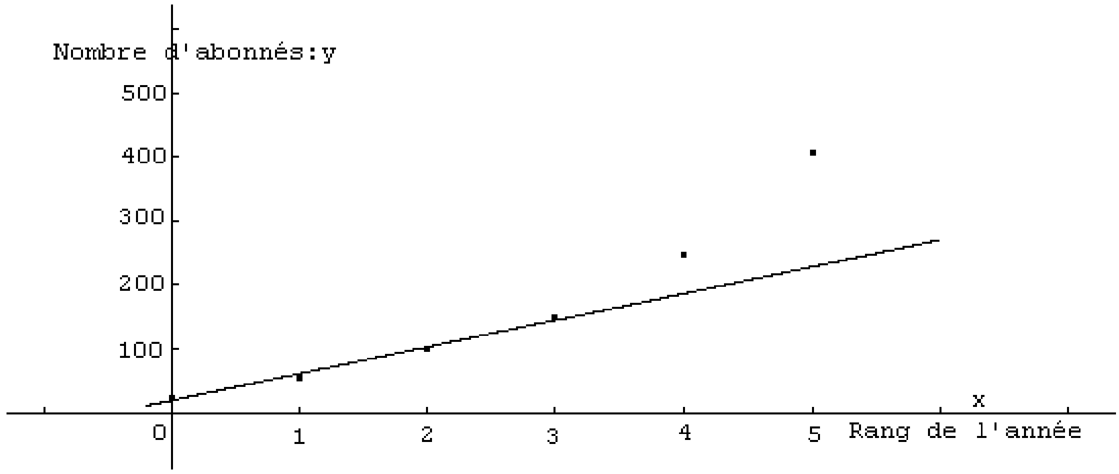
$$f(x) = x + \frac{x+2}{e^x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ (unité graphique :2cm).

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ.
   (d) Montrer qu'il existe un point A et un seul de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente T_2 à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ. (On précisera les coordonnées de A.)
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-2; -1]$ une solution et une seule α.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (c) Construire dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe $\mathcal{C}$, les tangentes T_1 et T_2 et la droite Δ.

Correction du DST N°7

Exercice 1 :

1. 

2. (a) $a = 41,8$ $\qquad b = 20,3$
   La droite d'ajustement affine de y en x a pour équation : $\quad y = 41,8x + 20,3$.
   pour $x = 0$, $\; y = 20,3$ $\qquad\qquad x = 5$, $\; y = 229,3$
   (b) en 1999, $x = 4$ et $y = 187,5$
   en 2000, $x = 5$ et $y = 229,3$
   en 2001, $x = 6$ et $y = 271,1$
   Les prévisions pour les années 1999, 2000 et 2001 sont respectivement environ 187, 229 et 271 millions d'abonnés.
3. (a)
   (b)

x	0	1	2	3	4	5
z	3,26	4,01	4,62	5,01	5,51	6,01

   Une équation de la droite d'ajustement de z en x est : $z = 0,53x + 3,4$.
   (c) or $z = \ln y$, ce qui donne $\quad \ln y = 0,53x + 3,4$
   D'où $y = e^{0,53x+3,4} = e^{0,53x}e^{3,4}$
   Donc $y = 30e^{0,53x}$
   (d) en 2001, $x = 5$ et $y = 424,6$
   en 2002, $x = 6$ et $y = 721,4$
   Les prévisions pour 2001 et 2002 sont donc environ 425 et 721 millions d'abonnés respectivement.

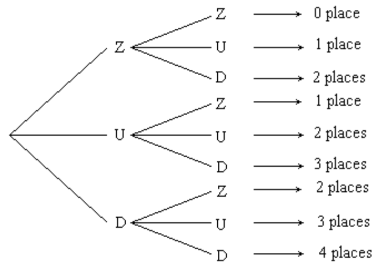
Exercice 2 :

1. (a) D'après l'énoncé,
   $p(G) = \dfrac{1}{2} = 0,5$, car il offre des places de cinéma dans la moitié des tablettes.
   $p_G(U) = \dfrac{60}{100} = 0,6$ car 60%des tablettes gagnantes permettent de gagner une place.
   $p_G(D) = \dfrac{40}{100} = 0,4$ car 40% des tablettes permettent de gagner deux places.
   (b) $p(U) = p(U \cap G) + p(U \cap \overline{G})$ $\quad , \quad$ mais $\; p(U \cap \overline{G}) = 0$
   $\qquad = p(U \cap G) = p_G(U) \times p(G) = 0,6 \times 0,5 = 0,3.$
   (c) Soit X le nombre de places gagnées par le client
   X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2
   $p(X = 0) = p(\overline{G}) = 1 - p(G) = 0,5$
   $p(X = 1) = p(U) = 0,3$ $\quad$ d'après la question précédente
   $p(X = 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$
   On obtient la loi de X

X	0	1	2
probabilité	0,5	0,3	0,2

   $E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 = 0,7.$
2. (a) La probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma est :
   $(p(X = 0))^2 = 0,5^2 = 0,25$
   (b) La probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma est :
   $1 - (p(X = 0))^2 = 1 - 0,25 = 0,75$

(c) Si on note Z l'événement : « le nombre de places gagnées est 0 ».
On a l'arbre :



La probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est :
$0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,3 + 0,2 \times 0,5 = 0,1 + 0,09 + 0,1 = 0,29$.

Problème :

PARTIE A : Etude de la fonction g

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $g'(x) = e^x - 1$
2. $g'(x) > 0$ signifie $e^x - 1 > 0$ c'est à dire $x > 0$
3. On obtient le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

4. $g(0) = 0$ et $g(0)$ est le minimum de la fonction g.
   Donc pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $g(x) > 0$
   et $g(x) = 0$ pour $x = 0$

PARTIE B - Etude de la fonction f

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{x+2}{e^x}$

1. (a) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0^+$
   d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
   (b) $f(x) = x + \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$
   $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = x + \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x + 2$; $u'(x) = 1$
   $v(x) = e^x$; $v'(x) = e^x$
   $f' = 1 + \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   $f'(x) = 1 + \dfrac{1 \times e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = 1 + \dfrac{e^x(1 - x - 2)}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x}{e^x} + \dfrac{-1-x}{e^x} = \dfrac{e^x - x - 1}{e^x} = \dfrac{g(x)}{e^x}$
   (b) Comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$
   d'où $f'(x) = 0$ pour $x = 0$
   et $f'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. (a) Une équation de T_1 tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ où $f'(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = \dfrac{0}{1} = 0$ et $f(0) = 0 + \dfrac{0+2}{e^0} = 0$
   Donc une équation de T_1 est : $y = 2$
   (b) $f(x) - x = \dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$
   et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) On résout $f(x) = x$
   $x + \dfrac{x+2}{e^x} = x$ d'où $\dfrac{x+2}{e^x} = 0$ ce qui donne $x + 2 = 0$ et $x = -2$.
   Donc les coordonnées du point d'intersection de Δ et $\mathcal{C}$ sont $(-2; -2)$.

(d) Δ a pour coefficient directeur 1.

On résout alors $f'(x)=1$ c'est à dire $\dfrac{g(x)}{e^x}=1$ d'où $g(x)=e^x$

$e^x-x-1=e^x$ donc $-x-1=0$ et $x=-1$

$f(-1)=-1+\dfrac{-1+2}{e^{-1}}=-1+\dfrac{1}{e^{-1}}=-1+e$

Donc il existe un unique point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ.

Ce point a pour coordonnées $(1;-1+e)$.

4. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $[-2;-1]$

$f(-2)=-1$, $f(-1)=-1+\dfrac{-1+2}{e^{-1}}=-1+e\simeq 1,71$ or $0\in[f(-2);f(-1)]$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-2;-1]$.

(b) $f(-1,69)\simeq -0,01$ et $f(-1,68)\simeq 0,037$

Donc $-1,69\leq\alpha\leq -1,68$

(c)