

Correction du DST N°3

Exercice 1 :

1. a) $f'(1)$ est la pente de la tangente à C en N.

Cette tangente est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

De même la tangente à C en Q qui est le point d'abscisse 3 est horizontale, donc $f'(3) = 0$.

$f'(2)$ est la pente de la tangente à C en P, c'est le coefficient directeur de la

droite Δ , égal à $\frac{y_S - y_P}{x_S - x_P} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{3 - 2} = -\frac{3}{2}$; d'où $f'(2) = -\frac{3}{2}$.

b) Une équation de Δ est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$f(2) = \frac{5}{2}$ (c'est l'ordonnée du point P)

d'où $y = -\frac{3}{2}(x - 2) + \frac{5}{2}$; $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

2. On trace la droite d'équation $y = 3$. Elle coupe la courbe en trois points. L'équation $f(x) = 3$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

3. f est la dérivée d'une fonction F sur $[0 ; 4]$, c'est à dire pour tout $x \in [0 ; 4]$, $F'(x) = f(x)$.

$f(x)$ est toujours positif sur $[0 ; 4]$.

La fonction F est alors strictement croissante sur $[0 ; 4]$.

4. a) pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = a(x - 1)(x - 3)$,

d'après la question **1. a)**, $f'(2) = -\frac{3}{2}$,

et d'autre part, $f'(2) = a \times 1 \times (-1) = -a$.

Donc $a = \frac{3}{2}$ et $f'(x) = \frac{3}{2}(x - 1)(x - 3)$

b) $f'(x) = \frac{3}{2}(x - 1)(x - 3) = \frac{3}{2}(x^2 - 3x - x + 3) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

f est une primitive de f' vérifiant $f(0) = \frac{3}{2}$.

donc $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + \frac{9}{2}x + k$ où $k \in \mathbb{R}$,

de plus $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f(0) = \frac{0^3}{2} - 3 \times 0^2 + \frac{9}{2} \times 0 + k = k$

donc $k = \frac{3}{2}$ et $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}$.

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5 - 2x^2}}$.

f est continue sur $[-1 ; 1]$, elle admet alors des primitives sur $[-1 ; 1]$.

On pose $u(x) = 5 - 2x^2$ d'où $u'(x) = -4x$.

On obtient alors : $f(x) = -\frac{1}{4} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Les primitives de f sur $[-1 ; 1]$ sont alors de la forme :

$F(x) = -\frac{1}{4} \times 2 \sqrt{u(x)} + k = -\frac{1}{2} \sqrt{5 - 2x^2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On veut de plus $F(0) = 0$, c'est à dire : $-\frac{1}{2} \sqrt{5 - 2 \times 0^2} + k = 0$ donc $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion : $F(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{5 - 2x^2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. a) chacune des fonctions proposées est continue sur $]1 ; +\infty[$, elles admettent alors une primitive sur $]1 ; +\infty[$.

• primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - 1)^3}$:

on pose $u(x) = x - 1$; $u'(x) = 1$

on a alors $\frac{1}{(x - 1)^3} = \frac{u'(x)}{(u(x))^3} = u'(x) \times (u(x))^{-3}$

Une primitive de cette fonction est alors $\frac{1}{-3 + 1} (u(x))^{-3 + 1} = \frac{1}{-2(u(x))^2} = \frac{1}{-2(x - 1)^2}$

• primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - 1)^4}$:

on a alors $\frac{1}{(x - 1)^4} = \frac{u'(x)}{(u(x))^4} = u'(x) \times (u(x))^{-4}$

Une primitive de cette fonction est alors $\frac{1}{-4 + 1} (u(x))^{-4 + 1} = \frac{1}{-3(u(x))^3} = \frac{1}{-3(x - 1)^3}$

b) f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x-1)^4}$

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1) + b}{(x-1)^4} = \frac{ax - a + b}{(x-1)^4}$$

on en déduit : $a = 1$ et $b = 1$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$$

Les primitives de f sur $]1; +\infty[$ sont alors de la forme :

$$F(x) = \frac{-1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^4} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{27x}{x^4 + 3}$

1. f est une fonction rationnelle

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{x^3} = 0$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{où } \begin{matrix} u(x) = 27x & \text{et} & v(x) = x^4 + 3 \\ u'(x) = 27 & \text{et} & v'(x) = 4x^3 \end{matrix}$$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{27(x^4 + 3) - 27x \times 4x^3}{(x^4 + 3)^2} = \frac{-81x^4 + 81}{(x^4 + 3)^2}.$$

$$\text{et } \frac{-81(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2} = \frac{-81(x^2-1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2} = \frac{-81(x^4-1)}{(x^4+3)^2} = \frac{-81x^4+81}{(x^4+3)^2}.$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ et $(x^4 + 3)^2 > 0$

$f'(x)$ est alors du signe de $-81(x-1)(x+1)$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de $-81(x-1)$	+		+	0	-
signe de $(x+1)$	-	0	+		+
signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-

3. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
f	0			$\frac{27}{4}$		

$$f(-1) = \frac{27 \times (-1)}{(-1)^4 + 3} = -\frac{27}{4}$$

$$f(1) = \frac{27 \times 1}{1^4 + 3} = \frac{27}{4}$$

4. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle
 f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{et } 1 > 0$$

l'équation $f(x) = 1$ n'admet donc pas de solution sur $]-\infty; -1[$.

f est strictement croissante sur $]-1; 1[$

$$f(-1) = -\frac{27}{4} \quad ; \quad f(1) = \frac{27}{4} \quad \text{et } 1 \in]-\frac{27}{4}; \frac{27}{4}[,$$

l'équation $f(x) = 1$ admet alors une unique solution α sur $]-1; 1[$.

f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$$f(1) = \frac{27}{4} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et } 1 \in]0; \frac{27}{4}[$$

l'équation $f(x) = 1$ admet alors une unique solution β sur $]1; +\infty[$.