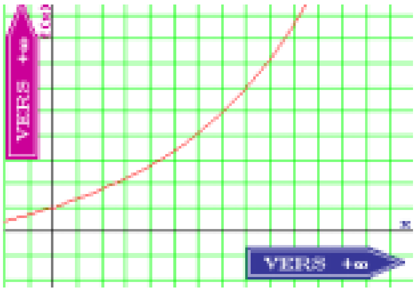
LIMITES et CONTINUITE

I. LIMITES EN L'INFINI

a) Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est :

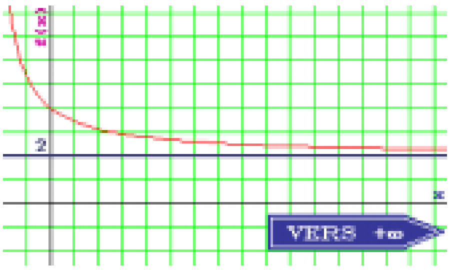


Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **f(x)** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum.
On dit alors que **f(x)** tend vers $+\infty$.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Limite finie

Considérons maintenant la fonction **f** dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **f(x)** se rapproche de plus en plus de **2**.
On dit alors que **f(x)** tend vers **2**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers $+\infty$ est égale à **2**.
Ce que l'on résume par :

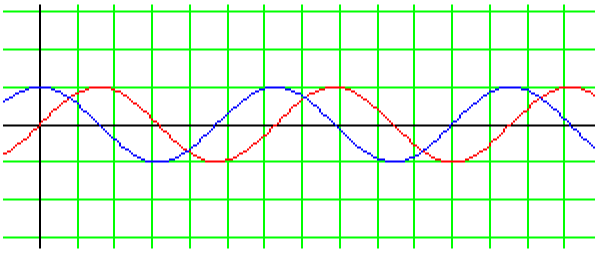
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

Note : Lorsque **x** tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **y = 2**.

On dit alors que **D** est une **asymptote horizontale** à la courbe de **f** au voisinage de $+\infty$.

c) Sans limite !

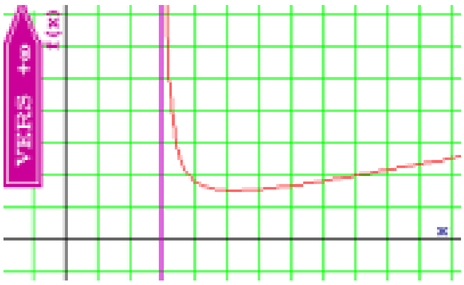
Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque **x** tend vers $+\infty$. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

II. LIMITES EN UN POINT

Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle] 3 ; $+\infty$ [dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** se rapproche de **3**, **f(x)** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête.
On dit alors que **f(x)** tend vers $+\infty$.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **3** est égale à $+\infty$.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

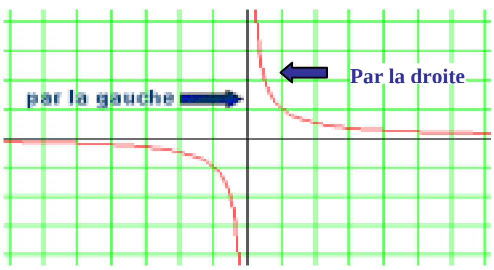
Note : Lorsque **x** tend **3**, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **x = 3**.
On dit alors que **D** est une **asymptote horizontale** à la courbe de **f** au voisinage de **3**.

Nous avons exclusivement évoqué des fonctions qui tendent vers $+\infty$ à l'approche d'un point. Mais il existe aussi des fonctions qui ont pour limite $-\infty$.
C'est à peu près pareil, sauf qu'au lieu de s'envoler vers le ciel elles s'enfoncent dans les abysses...

Limite à gauche et limite à droite.

Dans ce qui suit, **f** désignera la fonction inverse. Ainsi pour tout x : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse **f** est définie sur l'intervalle] $-\infty$; 0 [$\cup$] 0 ; $+\infty$ [.
Autrement écrit, lorsqu'elle tend vers 0, elle peut le faire :



lorsque **x** se rapproche de **0** par la gauche ou par valeurs inféri**eures**, **f(x)** tend vers **-∞**.
On dit alors que la limite à gauche de **f(x)** en **0** est égale à **-∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

lorsque **x** se rapproche de **0** par la droite ou par valeurs supérieures, **f(x)** tend vers **+∞**.
On dit alors que la limite à droite de **f(x)** en **0** est égale à **+∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

La fonction inverse n'admet pas de limite en 0 car elle a :
une limite à gauche de 0 qui vaut -∞ et une limite à droite de 0 qui vaut +∞.

III. LIMITES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonction	Ensemble de définition	Limite en -∞	Limite en 0	Limite en +∞
x	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	0	$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$		0	$+\infty$

IV. OPERATIONS SUR LES LIMITES

a) Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	+ ∞	+ ∞
l	– ∞	– ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞
– ∞	– ∞	– ∞
+ ∞	– ∞	Indéterminé

Exemples :

- $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3x - 1\right) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x} + x - 4\right) = -4$

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3)\left(\frac{1}{x}-4\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \times (x+5) =$ F.I.

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	Indéterminé
$l > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+5}{\frac{1}{x}-3} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x}}{x^2-2} = +\infty$

d) Limite d'une fonction composée.

Le théorème qui suit est assez naturel.

Théorème : Soit f et g deux fonctions. a, L et L' trois réels éventuellement égaux à +/– ∞

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{t \to L} g(t) = L' \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = L'$

Par exemple, avec la fonction **f** définie par tout réel x par :

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Déterminons la limite de **f** lorsque x tend vers + ∞.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} \sin(t) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{ainsi} \; : \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

V. METHODES DE CALCUL

Les opérations sur les limites ne permettent pas toujours de déterminer la limite d'une fonction. Il faut alors changer de chemin et modifier l'écriture de cette fonction... afin de pouvoir les appliquer !

a) Limite d'un polynôme

Déterminons la limite en + ∞ du polynôme f défini pour tout réel x par :

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$

Au premier abord, lorsque x tend vers + ∞ :

$$\begin{cases} 3x^3 \text{ tend vers } +\infty \\ -2x^2 \text{ tend vers } -\infty \\ 1 \text{ tend vers } 1 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{F.I.} \quad \text{(Forme Indéterminée)}$$

L'actuelle écriture de **f** ne permet pas de conclure. Modifions la.

$$f(x) = 3.x^3 - 2.x^2 + 1$$
$$= 3.x^3 . \left[1 - \frac{2.x^2}{3.x^3} + \frac{1}{3.x^3}\right] = 3.x^3 . \left[1 - \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}\right]$$

$\boxed{\text{On factorise par } 3.x^3}$

Lorsque x tend vers +∞ :

- $-\frac{2}{3.x}$ tend vers 0.
- $\frac{1}{3.x^3}$ tend également vers 0.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}\right] = 1 + 0 + 0 = 1$

De plus, lorsque x tend vers + ∞, nous savons que $3x^3$ tend vers + ∞.

Connaissant les limites des deux facteurs, nous pouvons connaître celle de leur produit f(x).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3.x^3 . \left[1 - \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}\right]$$
$$= (+\infty) \times (1) = +\infty$$

Remarque :

Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est $3x^3$ qui a imposé sa limite au produit.

Or $3x^3$ est le terme dominant du polynôme f(x).

Ce qui est vrai pour le cas particulier f l'est pour n'importe quel polynôme.

b) Limite d'une fraction rationnelle.

On considère la fonction rationnelle **g** définie pour tout réel *x* par :

$$g(x) = \frac{3.x^3 + 2.x^2 + 1}{5.x^4 - 4.x^3 + x}$$

Déterminons sa limite en + ∞.

Au premier abord, en utilisant ce que nous avons fait avec les polynômes, nous pouvons dire que lorsque *x* tend vers +∞ :

le numérateur **$3x^3 + 2x^2 + 1$** tend vers + ∞.

le dénominateur **$5x^4 - 4x^3 + x$** tend vers + ∞.

Ainsi, la limite de *g* est une forme indéterminée

La présente écriture de **g** ne permet pas de conclure. Il nous faut donc la modifier.

$$g(x) = \frac{3.x^3 + 2.x^2 + 1}{5.x^4 - 4.x^3 + x}$$

$$= \frac{3.x^3.\left[1 + \frac{2.x^2}{3.x^3} + \frac{1}{3.x^3}\right]}{5.x^4.\left[1 - \frac{4.x^3}{5.x^4} + \frac{x}{5.x^4}\right]}$$

On factorise le numérateur puis le dénominateur…

$$= \frac{3.x^3}{5.x^4} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}}{1 - \frac{4}{5.x} + \frac{1}{5.x^3}} = \frac{3}{5.x} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}}{1 - \frac{4}{5.x} + \frac{1}{5.x^3}}$$

Puis on fragmente la fraction et on simplifie…

Quand x tend vers +∞ : $1 + \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}$ tend vers 1 et $1 - \frac{4}{5.x} + \frac{1}{5.x^3}$ tend vers 1, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}}{1 - \frac{4}{5.x} + \frac{1}{5.x^3}} = \frac{1}{1} = 1$$

De plus, la limite de $\frac{3}{5.x}$ lorsque x tend vers +∞, est égale à 0.

Connaissant les limites des deux facteurs, celle de leur produit g(x) est à notre portée :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{5.x} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3.x} + \frac{1}{3.x^3}}{1 - \frac{4}{5.x} + \frac{1}{5.x^3}} = 0 \times 1 = 0$$

Remarque :

Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est $\frac{3}{5x}$ qui a imposé sa limite au produit.

Or, $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5.x}} = \frac{3.x^3}{5.x^4}$

Autrement dit, c'est le quotient du terme dominant du numérateur et du terme dominant du dénominateur qui a donné sa limite à *g*(*x*) en +∞.

c) Théorème des gendarmes.

Théorème des gendarmes :
Soit f, g, et h trois fonctions
On suppose que pour x assez grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
Alors si les fonctions g et h ont la même limite L en l'infini, la fonction f à l'infini est aussi égale à L

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur] 0 ; + ∞ [

On a : $-\dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{1}{x}$

De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc, par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

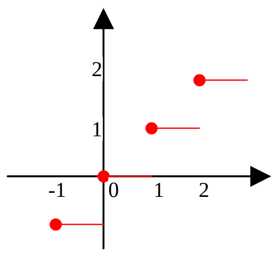
VI. CONTINUITE

a) Définition de la continuité

Définition :
Dire qu'une fonction f, définie sur un intervalle I contenant a est continue signifie que :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
La fonction est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout point de I

Graphiquement, cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon

Exemples :



1) La fonction partie entière, notée E est définie par :
E(x) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Par exemple, E(2,3) = 2 ; E(2) = 2 ; E(2,9999)= 2
Cette fonction est continue sur [1 ; 2 [et [2 ; 3 [,
mais elle n'est pas continue sur [1 ; 3 [.

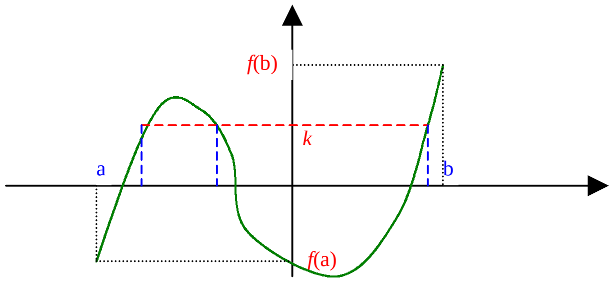
2) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, malgré l'angle en 0.

Théorème :
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$,
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition,
- La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur [0 ; + ∞ [,
- Les fonction sinus(x) et cosinus(x) sont continues sur $\mathbb{R}$

b) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, soit a et b deux réels appartenant à I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que : f(c) = k

Illustration :



Théorème de la bijection :
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b], alors :

- On dit que f réalise une bijection de [a ; b] sur [f(a) ; f(b)] si f est croissante, et sur [f(b) ; f(a)] si f est décroissante,
- Pour tout réel k de l'intervalle d'arrivée, l'équation $f(x)$ = k admet une unique solution x_0 dans l'intervalle [a ; b].

Exemple :
La fonction f définie sur [– 2 ; 3] par $f(x) = x^3$ est strictement croissante
Elle réalise une bijection sur [$f(-2)$; $f(3)$] = [– 8 ; 27]
Donc, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans [– 2 ; 3]

Remarque :
Pour trouver une solution α à 10^{-1} près, on rentre la fonction dans la calculatrice, et on fait un tableau avec un pas de 0,1, puis on recherche 2 valeurs successives pour lesquelles les images encadrent 10 :
On trouve $f(2,1) = 9,2$ et $f(2,2) = 10,6$ donc, α = 2,1.