POLYNESIE (juin 2002)

Exercice 1 :

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un paquet de café en francs au 31 décembre de l'année 1900 + n.

Rang n_i de l'année	70	80	88	94	96	98	99	100
Prix y_i en francs	3	5,5	10	15,5	19,3	19,4	20	21

Sauf autre précision, tous les résultats et coefficients demandés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

• Ajustement affine

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série (n_i ; y_i). (*Hors programme 2003.*)

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de y en n.

2. En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'à l'an 2002, donner une estimation du prix, en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.

On rappelle qu'un euro vaut 6,55957 francs.

Partie B

• Ajustement exponentiel

1. *Le détail des calculs n'est pas demandé.*

a) Recopier et compléter le tableau suivant où $z_i = \ln y_i$ (valeurs arrondies à 10^{-3}).

n_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	1,099	1,705	2,303		2,960			

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_2 de la série (n_i ; z_i). (*Hors programme 2003.*)

c) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de z en n.

2. Déduire du **1. c)** une expression de y en fonction de n de la forme $y = \alpha \,.\, \beta^n$.

Cet ajustement est dit exponentiel.

3. En supposant que ce modèle exponentiel reste valable jusqu'en 2002, donner une estimation du prix en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.

4. Quelle est la meilleure estimation du prix au 31/12/2002 d'un paquet de café ? Justifier.

Exercice 2 :

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :

- si le joueur obtient un « six », il gagne 10 euros ;
- s'il obtient un « un », un « deux », ou un « trois », il ne gagne rien et le jeu s'arrête ;
- s'il obtient un « quatre », ou un « cinq », le joueur lance le dé une deuxième fois ;
- s'il obtient un « six », il gagne alors 5 euros, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 2 euros.

Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise ; un « gain » peut donc être négatif. Soit G la variable aléatoire qui, à chaque partie effectuée par un joueur donné, associe son gain.

1. Quelles sont les valeurs prises par G ?

2. *Premier cas* : le joueur joue avec un dé bien équilibré.

a) Montrer que $p(\mathrm{G} = 3) = \dfrac{1}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

b) Déterminer la loi de probabilité de G, puis l'espérance mathématique de G. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?

3. *Deuxième cas* : le joueur joue avec un dé pipé.

On note p_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \leq i \leq 6$.

On sait que p_6 est le double de p_1 et que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

a) Déterminer les valeurs de p_i pour $1 \leq i \leq 6$.

b) Montrer alors que $p(\mathrm{G} = 3) = \dfrac{4}{49}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de G.

Exercice 2 :

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 2 boules blanches, 6 boules rouges.

Un joueur tire simultanément 2 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. On considère les événements suivants :

- A : « Obtenir 2 boules blanches » ;
- B : « N'obtenir aucune boule blanche ».

Calculer, sous forme de fractions irréductibles, les probabilités $p(\mathrm{A})$ et $p(\mathrm{B})$ des événements A et B. En déduire la probabilité de l'événement C : « Obtenir une seule boule blanche ».

3. Lors d'un tel tirage :

- si le joueur tire 2 boules blanches, il gagne 10 euros ;
- s'il ne tire aucune boule blanche, il perd 2 euros ;
- s'il tire une seule boule blanche, il garde celle-ci, remet l'autre dans l'urne et reprend alors au hasard une seule boule dans l'urne ; si cette dernière est blanche, il gagne 5 euros, sinon il perd un euro.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur (une perte est un gain négatif).

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) A l'aide d'un arbre pondéré, montrer que $p(\mathrm{X} = 5) = \dfrac{3}{49}$.

c) Donner la loi de probabilité de X.

d) En déduire l'espérance mathématique arrondie au centième de la variable aléatoire X. Interpréter celle-ci.

Problème :

Partie A

• Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}4x + \mathrm{e}^{-0{,}4x+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\ ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 4 cm en ordonnée).

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 0{,}4x$ est asymptote à la courbe (C).

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

2. a) Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation suivante :
$1 - \mathrm{e}^{-0{,}4x+1} \geq 0$.

b) A l'aide de la question précédente, étudier les variations de la fonction f sur I.

c) Dresser le tableau de variations de f. En déduire le signe de f sur $[0\ ;+\infty[$.

3. a) Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 passe par le point B(2,5 ; 1).

b) Construire (C), (D) et (T).

Partie B

• Application économique

x étant le nombre d'objets, exprimé en centaines, fabriqués par une usine, $f(x)$ est leur coût total, exprimé en milliers d'euros. On suppose que x appartient à l'intervalle $\mathrm{J} = [2{,}5\ ;+\infty[$. Chaque objet est vendu 5 euros pièce. On suppose que la fabrication est vendue dans sa totalité.

1. a) Exprimer la recette $\mathrm{R}(x)$, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de centaines d'objets fabriqués.

b) Construire, sur le graphique précédent, la courbe représentative (Δ) de la fonction R traduisant cette recette.

c) Vérifier graphiquement que (Δ) et (C) se coupent en un seul point. On désigne par α l'abscisse de ce point ; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.

2. a) Montrer que le bénéfice, noté $\mathrm{B}(x)$, s'exprime en milliers d'euros par :

$$\mathrm{B}(x) = 0{,}1x - \mathrm{e}^{-0{,}4x+1}.$$

b) Quel est, en euros, le bénéfice obtenu en fabricant 1000 objets ?
On donnera une valeur arrondie à l'euro.

c) Calculer $\mathrm{B}'(x)$ et étudier le sens de variation de B sur $[2{,}5\ ;+\infty[$.

d) Démontrer que l'équation $\mathrm{B}(x) = 0$ admet une solution unique sur J appartenant à $[2{,}5\ ; 10]$.
Montrer que cette solution est le nombre α défini dans la question **1. c)**.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

e) En déduire le nombre entier minimum d'objets à produire pour réaliser un bénéfice.