CENTRES ETRANGERS GROUPE 1 (juin 2002)

Exercice 1 :

Commun à tous les candidats

Les détails des calculs effectués à la calculatrice ne sont pas demandés. Sauf indication contraire, les valeurs obtenues seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-2} près.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une petite ville proche d'une métropole en pleine expansion.

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'années (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
Population (y_i)	5 400	5 600	7 000	8 000	8 750	11 200	13 900	15 000

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal :

- Sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour 5 années.
- Sur l'axe des ordonnées, on placera 5 000 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 000 habitants.

a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i , y_i).

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (x_i, y_i) et placer ce point sur le graphique.

c) Déterminer l'équation de la droite (D) d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer (D) sur le graphique précédent.

d) En supposant que ce modèle reste pertinent jusqu'en 2020, quelle serait la population de cette ville, à une unité près, en 2020 ?

2. a) Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
$z_i = \ln(y_i)$								

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x_i ; y_i) (*Hors programme 2003*.)

c) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

d) En supposant que ce second modèle reste pertinent jusqu'en 2020, donner une nouvelle précision, à une unité près, de la population de cette ville en 2020.

3. Les crédits alloués par l'Etat aux municipalités étant proportionnels au nombre d'habitants, quel modèle permet la prévision la plus favorable aux finances de la ville en 2020 ?

Exercice 2 :

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un jeu consiste à lancer, de la main gauche, une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\frac{5}{6}$ sont droitiers et $\frac{1}{6}$ sont gauchers.

Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\frac{1}{4}$.

Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

1. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :

- G l'événement : « L'individu choisi est gaucher » ;
- S l'événement : « L'individu met la balle dans le seau ».

a) Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap S$.

b) Calculer la probabilité de l'événement S.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière, sachant qu'elle a mis la balle dans le seau.

2. Dans cette question on a sélectionné Paul qui est un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre ; on suppose les deux lancers indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles dans le seau après les deux lancers.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X).

Exercice 2 :

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déduire, en utilisant la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme w_0 et la raison.
3. a) Exprimer w_n en fonction de n.
b) Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln(27^3) - \ln 9$?

<u>Problème :</u>

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b et c sont des nombres réels. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer a, b et c pour que la courbe (C) passe par la point $A(-\frac{1}{2} ; 0)$ par le point $B(0 ; 1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.
2. On supposera désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote pour (C).
b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α.
Donner la valeur décimale arrondie à 10^{-1} de α.
5. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point B.
6. Tracer (C) et (T) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On donne la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3$.
1. Montrer que F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule pour $x = 0$.
2. Calculer, en cm², la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.
Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près.