AMERIQUE du NORD (juin 2005)

Exercice 1 : (3 *points*) :

Commun à tous les candidats

Les deux questions sont indépendantes.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30% en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89%.

2. La première année cet impôt baisse de 5%, la deuxième année la baisse est de 1% et la troisième année de 3%.

a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?

b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

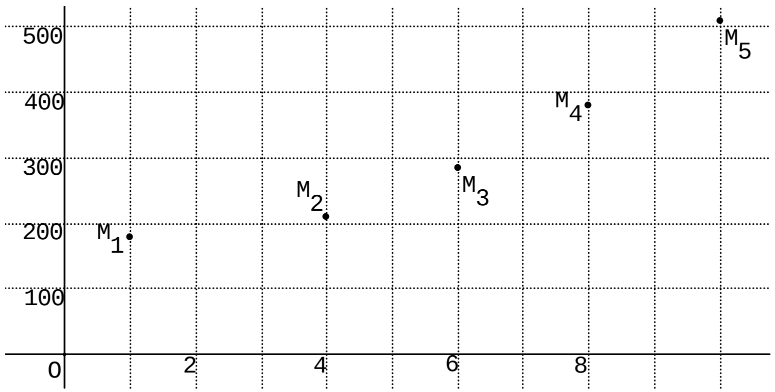
Exercice 2 : (5 *points*) :

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
CA y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal.
Un ajustement affine semble-t-il adapté ?



2. On pose $z_i = \ln y_i$.

a) Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.

b) Construire le nuage de points $N_i(x_i\ ;\ z_i)$ dans le repère orthogonal suivant :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année
- sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3. a) Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.

b) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = \mathrm{A} \times \mathrm{k}^x$.
(Arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près.)

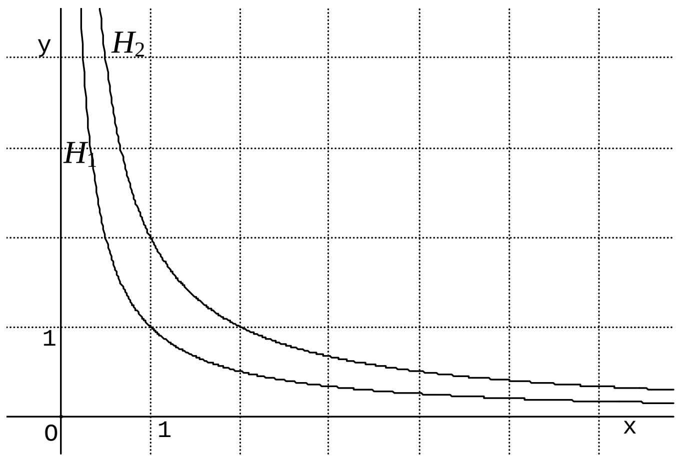
4. a) Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).

b) Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.

c) A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

Exercice 2 (5 *points*) :

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Les courbes H_1 et H_2 représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation $y=\frac{1}{x}$ et $y=\frac{2}{x}$.

On note D_2 le domaine délimité par les courbes H_1, H_2 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note D'_2 le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe H_1 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines D_2 et D'_2 d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine D_n délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

On pourra comparer les nombres $n(n+2)$ *et* $(n+1)^2$.

4. Etudier la convergence de la suite (u_n).

5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine D_n reste supérieur à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.

6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

<u>Exercice 3 :</u> (6 *points*) :

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.

L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.

Barème : *Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.*

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

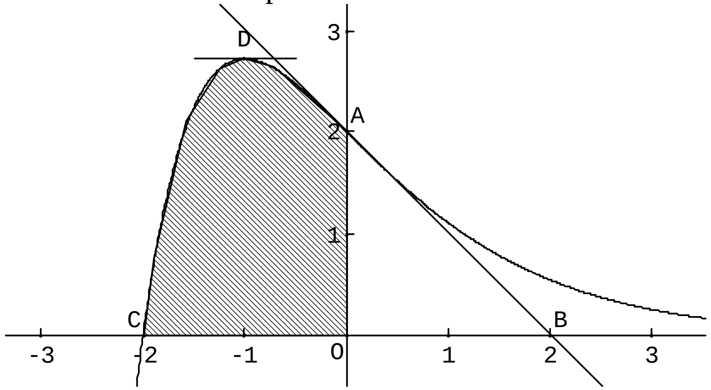
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	REPONSES
1. Soit une série statistique à deux variables (x ; y). Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y=1,35x+22,8$. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32,575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison –5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier $n, u_{n+1}-u_n=5$ ☐ $u_{10}=u_2+40$ ☐ $u_3=u_7+20$
3. L'égalité $\ln(x^2-1)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ est vraie	☐ Pour tout x de $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ ☐ Pour tout x de $]1;+\infty[$
4. Pour tout réel x, le nombre $\frac{e^x-1}{e^x+2}$ est égal à :	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2}$ ☐ $\frac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$
5. On pose $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^x-1}dx$ et $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x-1}dx$, alors le nombre I – J est égal à	☐ $\ln\frac{2}{3}$ ☐ $\ln\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1-\frac{2}{100}\right)^x\leq 0,5$ est	☐ S = $]-\infty;\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}[$ ☐ S = $[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)};+\infty[$ ☐ S = $[\ln\frac{0,5}{0,98};+\infty[$

Exercice 4 : (5 *points*) :

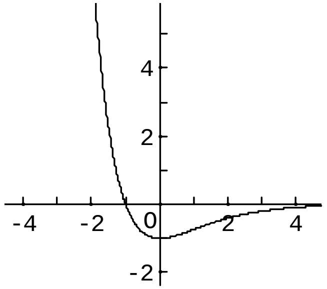
Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points A(0 ; 2) et C(–2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse –1 est parallèle à l'axe des abscisses.

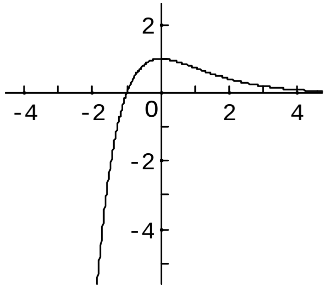


1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

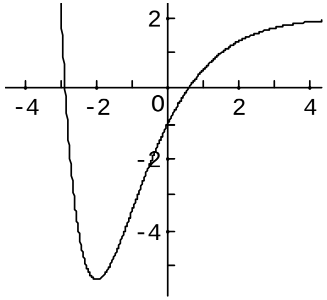
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

2. a) Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + K)e^{\alpha x}$ où K et α sont des constantes réelles.

Calculer $f'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α.

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de f.

b) En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.

On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.