AMERIQUE DU NORD (juin 2004)

Exercice 1 : (6 *points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

A la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de sixième comprenant 25 élèves.

PARTIE A : On sait que, dans cette classe, 48% des élèves ont 11 ans, $\frac{1}{5}$ ont 13 ans et les autres ont 12 ans. Ces élèves utilisent deux types de sacs de cours : le sac à dos ou le cartable classique. 15 élèves, dont les $\frac{2}{3}$ ont 11 ans, ont acheté un cartable classique ; les autres, dont la moitié ont 12 ans, ont acheté un sac à dos.

1. Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter à l'aide des données de l'énoncé :

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans			
12 ans			
13 ans			
Total			

2. On interroge au hasard un élève de cette classe.

On note : S l'événement : « l'élève a un sac à dos » ;

C l'événement : « l'élève a un cartable » ;

T l'événement : « l'élève a treize ans ».

a) Montrer que $P(S) = 0{,}4$.

b) Calculer $P(C \cap T)$.

3. On interroge successivement et de manière indépendante trois élèves de cette classe ; quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos ?

PARTIE B : A leur inscription, ces élèves doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20€ est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30€ est choisi avec une probabilité de 0,3. De plus, le collège propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15€. Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40% des élèves prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note : A l'événement : « l'élève a choisi le contrat A » ;

B l'événement : « l'élève a choisi le contrat B » ;

F l'événement : « l'élève est adhérent au foyer ».

1. Construire l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus.

2. Quelle est la probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?

3. A chaque élève pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle du foyer) ;

a) Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?

b) Etablir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 2 : (5 *points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une grande entreprise publie chaque année son chiffre d'affaires, en millions d'euros.

Le tableau ci-dessous donne les chiffres d'affaires des années 1995 à 2001.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires y_i en millions d'euros	20,4	24,2	33,8	38,6	49	53,9	59,29

Le nuage des points M_i associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un plan rapporté à un repère orthogonal est donné en **annexe page 6/6**.

1. Répondre sans justification par Vrai ou Faux aux 4 affirmations suivantes :

Les pourcentages sont arrondis au dixième.

a) Entre 1997 et 1998, le chiffre d'affaires a augmenté de 14,2%.

b) Entre 2000 et 2001, l'augmentation en pourcentage du chiffre d'affaires a été la même qu'entre 1999 et 2000.

c) Entre 1995 et 2001, l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du chiffre d'affaires a été d'environ 31,8%.

d) On considère le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont (3 ; 38,6).

On cherche maintenant à faire des prévisions sur le chiffre d'affaires pour l'année 2004 en utilisant plusieurs méthodes.

2. a) Expliquer pourquoi le nuage de points donné en annexe montre qu'un ajustement affine peut être envisagé.

b) Tracer la droite d_1 passant par M_0 et M_6 ; par lecture graphique, déterminer une prévision n_1 du chiffre d'affaires pour l'année 2004.

c) A l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d_2, droite d'ajustement de *y* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième le plus proche. En déduire une prévision n_2 du chiffre d'affaires pour 2004.

3. On remarque que les valeurs du chiffre d'affaires correspondant aux années 1999, 2000 et 2001 forment une suite géométrique ; on pose $u_0 = 49$, $u_1 = 53{,}9$ et $u_2 = 59{,}29$.

a) Calculer la raison de cette suite.

b) Calculer la valeur de u_5 pour cette suite géométrique. Comment peut-on l'interpréter ?

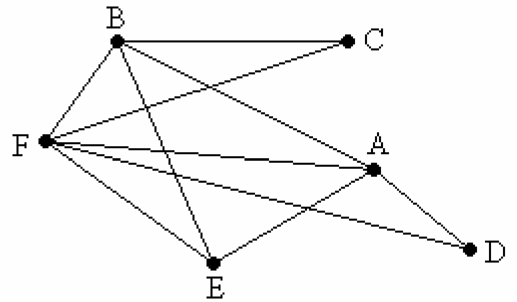
Exercice 2 : (5 *points*)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On considère le graphe G_1 ci-dessous :



1. Justifier les affirmations suivantes :

A_1 – Le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.

A_2 – La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G_1

2. Déterminer un sous-graphe complet de G_1 ayant le plus grand ordre possible. En déduire un minorant du nombre chromatique γ de ce graphe.

3. Déterminer un majorant de ce nombre chromatique (on justifiera la réponse).

4. En proposant une coloration du graphe G_1, déterminer son nombre chromatique.

PARTIE B

Soit la matrice M d'un graphe orienté G_2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Construire le graphe G_2.

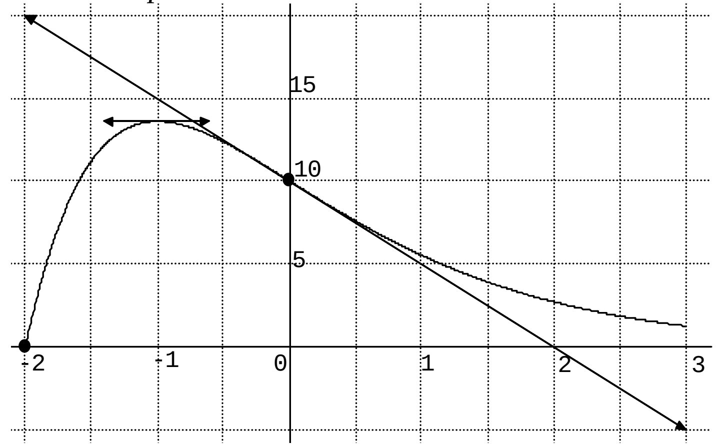
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D. Les citer toutes.

Exercice 3 : (4 *points*)

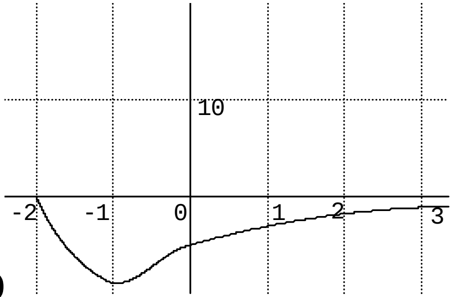
Commun à tous les candidats

La représentation graphique (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $[-2 ; 3]$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On note f' la fonction dérivée de f.

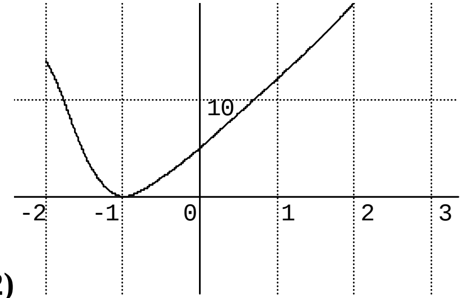
La courbe (C) vérifie les propriétés suivantes : *Les points ainsi marqués • sont à coordonnées entières et appartiennent à la courbe tracée, la tangente au point d'abscisse* -1 *est parallèle à l'axe des abscisses, la tangente au point d'abscisse* 0 *coupe l'axe des abscisses en* $x = 2$.



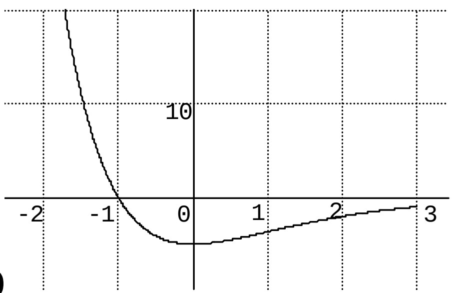
1. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
2. Donner les variations de f.
3. Une des quatre courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'. Déterminer celle qui la représente, en justifiant l'élimination de chacune des 3 autres courbes.



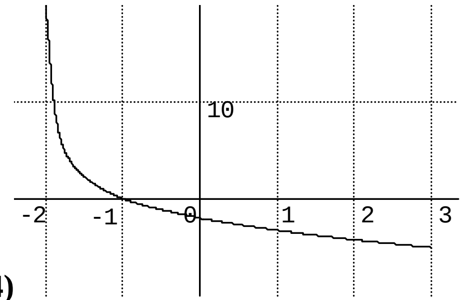
(1)



(2)



(3)



(4)

4. On admet que la fonction f est définie par une expression de la forme $f(x) = (ax+b)e^{kx}$ où a, b et k sont des nombres réels.
a) Déterminer f' en fonction de a, b et k.
b) En utilisant la question précédente et les propriétés de la courbe (C) données au début de l'exercice, calculer a, b et k.

Exercice 4 : (5 *points*)
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. a) Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$; (Calculer la valeur exacte de la solution, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-3}).
b) Résoudre dans I l'inéquation $f(x) > 0$.
2. On donne ci-dessous le tableau de variation de f sur l'intervalle I.

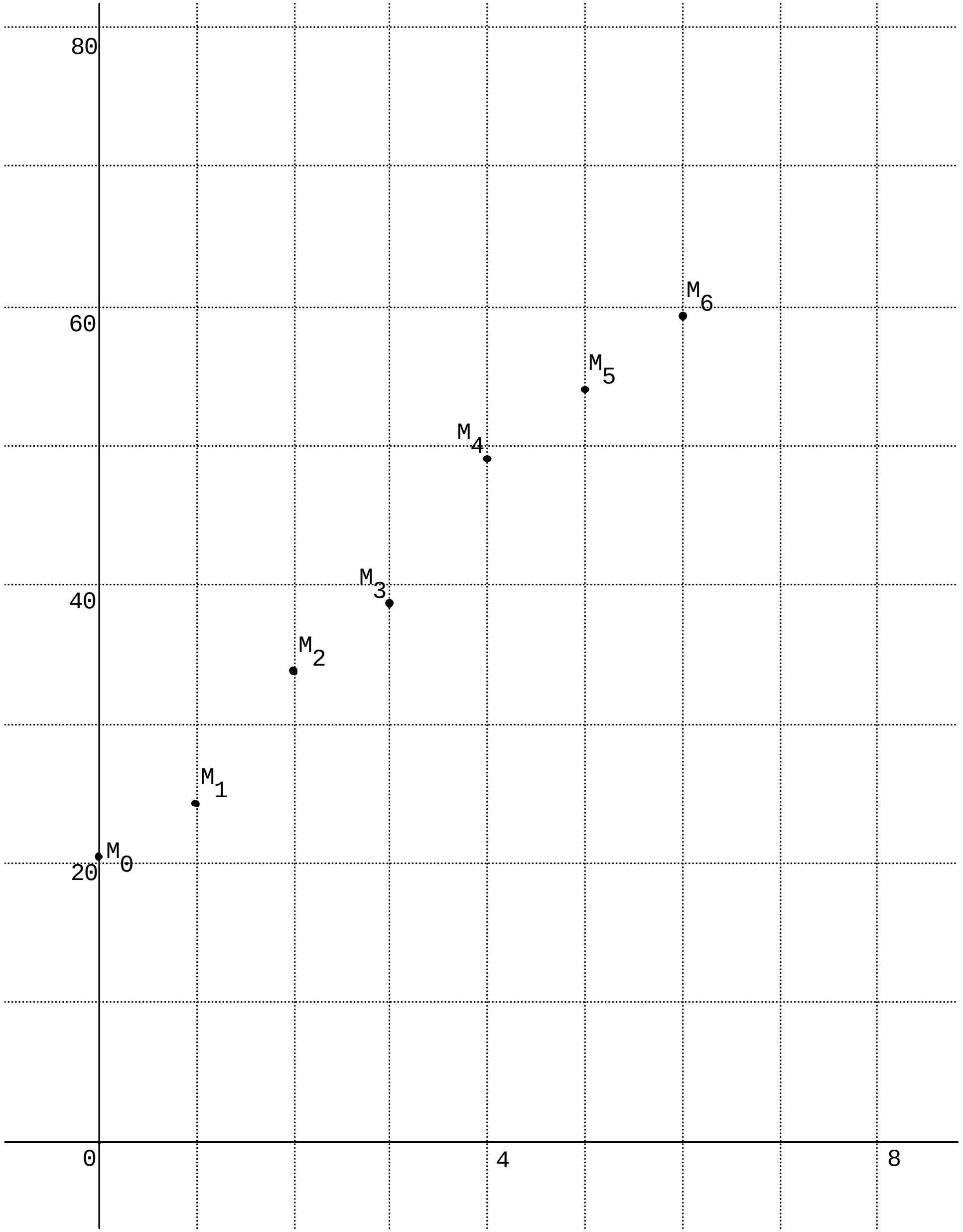
Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau (variations, limites, valeurs numériques).

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	–	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3. Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle [0,2 ; +∞[le « bénéfice » mensuel (éventuellement négatif) réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice est exprimé en milliers d'euros.

En utilisant les résultats des questions précédentes, répondre aux questions suivantes :
a) Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ?
b) Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser le bénéfice maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

ANNEXE A L'EXERCICE 2
A RENDRE AVEC LA COPIE



MATHEMATICS - SERIE ES

Eléments de formulaire

Probabilités

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A\cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \ldots + P(A\cap B_n)$.

Espérance mathématique

Une loi de probabilité étant donnée, son espérance mathématique est

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Analyse

Limites

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Dérivées et primitives

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules doivent être vérifiées par le candidat.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Correction du sujet Amérique du nord 2004

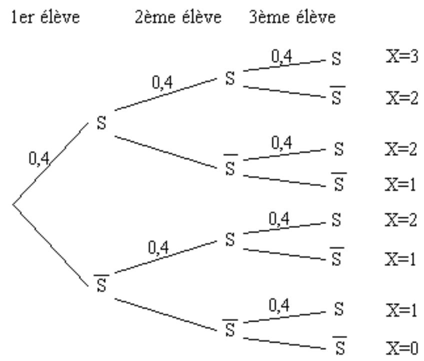
Exercice 1:

PARTIE A

1. Dans la classe 48% des élèves ont 11 ans, c'est à dire $25 \times \dfrac{48}{100} = 12$ élèves.
   $\dfrac{1}{5}$ ont 13 ans, c'est à dire 5. On en déduit que 8 élèves ont 12 ans.
   15 élèves ont un cartable, et les $\dfrac{2}{3}$ de ces 15 élèves, c'est à dire 10 élèves ont de plus 11 ans.
   10 élèves ont un sac à dos et parmi eux, 5 ont 12 ans.
   On en déduit le tableau suivant :

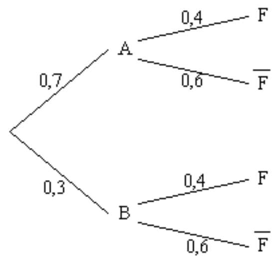
	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans	2	10	12
12 ans	5	3	8
13 ans	3	2	5
Total	10	15	25

2. (a) Sur les 25 élèves, 10 ont un sac à dos, donc $P(S) = \dfrac{10}{25} = 0,4$.
   (b) Sur les 25 élèves 2 élèves ont un cartable et treize ans, donc $P(C \cap T) = \dfrac{2}{25} = 0,08$.
3. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.
   On note X le nombre d'élèves qui ont un sac à dos.
   On cherche alors $P(X = 2)$. On construit alors un arbre :



   On obtient alors $P(X = 2) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$

PARTIE B



1.
2. On cherche $P(B \cap F)$
   $P(B \cap F) = P(B) \times P(F)$ car F et B sont indépendants, d'où $P(B \cap F) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$
3. (a) X prend les valeurs 20, 30, 35 ou 45.
   (b) $P(X = 20) = P(A \cap \overline{F}) = P(A) \times P(\overline{F}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$
   $P(X = 30) = P(B \cap \overline{F}) = P(B) \times P(\overline{F}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$
   $P(X = 35) = P(A \cap F) = P(A) \times P(F) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$
   $P(X = 45) = P(B \cap F) = P(B) \times P(F) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$
   Loi de X :

X	20	30	35	45
probabilités	0,42	0,18	0,28	0,12

   (c) $E(X) = 20 \times 0,42 + 30 \times 0,18 + 35 \times 0,28 + 45 \times 0,12 = 29$
   En moyenne, la dépense d'un élève est de 29€.

Exercice 2: (obligatoire)

1. (a) Entre 1997 et 1998, le chiffre d'affaire a augmenté de $\dfrac{38,6-33,8}{33,8}\times 100 \simeq 14,2$ %, donc la réponse est **vraie**.

   (b) Entre 1999 et 2000, l'augmentation a été de $\dfrac{53,9-49}{49}\times 100 = 10\%$, et entre 2000 et 2001, l'augmentation a été de $\dfrac{59,29-53,9}{53,9}\times 100 = 10\%$. Donc la réponse est **vraie**.

   (c) Si l'augmentation annuelle moyenne avait été de 31,8%, en 1995, le chiffre d'affaire aurait été de $20,4+20,4\times\dfrac{31,8}{100} = 20,4\times 1,318 = 26,8872$. En 1996, il aurait été de $20,4\times 1,318^2$ et en 2001, il aurait été de $20,4\times 1,318^6 \simeq 106,9$. Donc la réponse est **fausse**.

   (d) Le point moyen a pour coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$ où $\overline{x}=3$ et $\overline{y}\simeq 39,9$. Donc la réponse est **fausse**.

2. (a) Les points sont presque alignés, donc un ajustement affine peut être envisagé.

   (b) Par lecture graphique, on peut prévoir un chiffre d'affaire en 2004 d'environ 79 millions d'euros.

   (c) Une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y=6,83x+19,39$.
   Pour $x=9$, on obtient $y=6,83\times 9+19,39=80,86$. Donc on prévoit ainsi en 2004 un chiffre d'affaires de 80,86 millions d'euros.

3. (a) $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{u_2}{u_1}=1,1$, donc la raison de la suite est $1,1$.

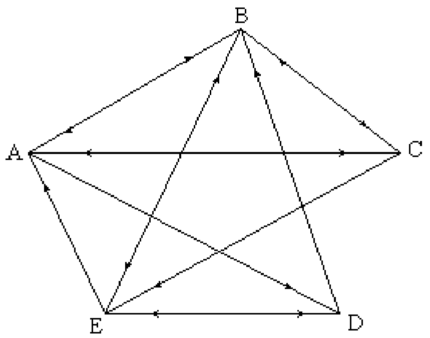
   (b) $u_5=u_0\times 1,1^5=49\times 1,1^5\simeq 78,91$. On peut alors estimer le chiffre d'affaires en 2005 à environ 78,9 millions d'euros.

Exercice 2: (spécialité)

PARTIE A

1. A_1 : G_1 contient deux sommets de degré impair : F et E, donc G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.
   A_2 : La chaîne DABCFBEFAE ne contient pas l'arête FD, donc ce n'est pas une chaîne eulérienne.
2. ABFE est un sous-graphe complet de G_1, de plus C et D ne peuvent faire partie que de sous-graphes complets d'ordre 3 (BCF et ADF).
   Donc le sous-graphe complet de G_1 ayant le plus grand ordre possible est ABFE. Donc $\gamma\geqslant 4$.
3. F a pour degré 5, et c'est le sommet de plus haut degré, donc $\gamma\leqslant 6$.
4. On colorie F en rouge, puis R et D en vert, ensuite E et C en bleu, et enfin A en jaune.
   On a ainsi un coloriage du graphe G_1 et on en déduit $\gamma=4$.

PARTIE B



1.
2. On lit dans la matrice M^3, à la deuxième ligne et quatrième colonne le nombre 3. On en déduit qu'il y a 3 chaînes de longueur 3 reliant B à D : BCED, BCAD et BEAD.

Exercice 3:

1. Par lecture graphique, on obtient que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est : $y = -5x + 10$.
2. D'après la courbe représentative de f, f est strictement croissante sur $[-2; -1[$ et strictement décroissante sur $]-1; 3]$.
3. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse -1 est horizontale, d'où $f'(-1) = 0$, or pour la courbe **(1)**, l'image de -1 est différente de 0, donc on élimine la courbe **(1)**.
   f est strictement décroissante sur $]-1; 3]$, d'où $f'(x) > 0$ sur $]-1; 3]$, ce qui nous permet d'éliminer la courbe **(2)**.
   On a de plus $f'(0) = -5$, mais sur la courbe **(4)**, on voit que l'image de 0 est environ -2, donc on élimine la courbe **(4)**.
   En conclusion, c'est la courbe **(3)** qui représente la fonction f'.
4. (a) $f(x) = (ax + b)e^{kx} = u(x)v(x)$ où $u(x) = ax + b$; $u'(x) = a$
   $v(x) = e^{kx}$; $v'(x) = ke^{kx}$
   $f' = u'v + uv'$
   $f'(x) = ae^{kx} + (ax + b) \times ke^{kx} = e^{kx}(a + kax + kb)$

   (b) On a $f(0) = 10$ et $f(0) = e^{k\times 0}(a \times 0 + b) = b$, d'où $b = 10$
   De plus, $f(-2) = 0$ et $f(-2) = (-2a + b)e^{-2k}$ d'où $(-2a + b)e^{-2k} = 0$ ce qui donne $-2a + b = 0$ et $a = \dfrac{1}{2}b = 5$
   On a aussi $f'(-1) = 0$ et $f'(-1) = e^{-k}(a - ka + kb) = e^{-k}(5 - 5k + 10k) = e^{-k}(5k + 5)$
   d'où $e^{-k}(5k + 5) = 0$ ce qui donne $5k + 5 = 0$ et $k = -1$.
   Donc $f(x) = (5x + 10)e^{-x}$.

Exercice 4:

1. (a) $f(x) = 0$ nous donne $\dfrac{2(1 + \ln x)}{x} = 0$ d'où $2(1 + \ln x) = 0$
   et alors $\ln x = -1$ et donc $x = e^{-1} \simeq 0,368$

   (b) $f(x) > 0$ nous donne $\dfrac{2(1 + \ln x)}{x} > 0$ d'où $2(1 + \ln x) > 0$, car $x > 0$
   on a alors $1 + \ln x > 0$ et on obtient : $\ln x > -1$ et $x > e^{-1}$
   Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $]e^{-1}; +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = 2(1 + \ln x) = 2 + 2\ln x$; $u'(x) = \dfrac{2}{x}$
   $v(x) = x$; $v'(x) = 1$
   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \times x - 2(1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$
   or $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2\ln x$
   et $-2\ln x > 0$ signifie $\ln x < 0$, donc $0 < x < 1$
   alors $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.
   Donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to 0} 2(1 + \ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
   $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. (a) Le bénéfice est positif lorsque $f(x) > 0$, c'est à dire $x > e^{-1}$, donc à partir de 368 objets, le bénéfice est positif.

   (b) Le bénéfice est maximal lorsque $f(x)$ est maximal, c'est à dire pour $x = 1$, et $f(1) = 2$
   Donc le bénéfice maximal est de 2000€, et il est atteint pour une production de 1000 objets.