TES

Mathématiques

3 heures

Calculatrice autorisée

Les éléves non spécialistes traiteront les exercices 1 à 4.
Les élèves spécialistes traiteront les exercices 1 à 3 et 4'.

L'annexe sera rendue complétée ou non avec la copie.

Exercice 1: ***5,5 points***

Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 5] par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$.

c) Etudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I. En déduire le tableau de variations de f sur [0 ; 5].

d) En déduire le signe de f(x) sur [0;5]

2. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction g.

b) En déduire une primitive de la fonction f sur I.

3. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'aire A , en cm ², de la portion de plan comprise entre (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ *et* $x = e$. On hachurera sur la figure en annexe l'aire A.

Exercice 2: ***5 ,5 points***

Un assembleur d'ordinateurs a équipé chacun d'eux d'une carte mère de marque, soit Elite, soit Futura. 35% des ordinateurs sont équipés de cartes mères Elite.

Il a aussi muni chacun d'eux d'un processeur choisi parmi trois références : Premium, P20 et P30.

- 60% des ordinateurs équipés de cartes mères Elite sont munis d'un processeur Premium et 30% d'un processeur P20.
- 30% des ordinateurs équipés de cartes mères Futura sont munis d'un processeur Premium et 20% d'un processeur P20.

On teste au hasard un ordinateur chez cet assembleur : tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être testés.

On considère les événements suivants :

E : « L'ordinateur est équipé d'une carte mère Elite »
F : « L'ordinateur est équipé d'une carte mère Futura »
P_1 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur Premium »
P_2 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur P20 »
P_3 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur P30 »

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

Dans les questions suivantes, les résultats des calculs seront arrondis au millième.

2. a) Déterminer la probabilité de l'événement $F \cap P_1$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement P_1.

c) On teste au hasard un ordinateur équipé du processeur Premium. Quelle est la probabilité qu'il soit muni de la carte mère Futura ?

3. L'assembleur gagne 450€ sur un ordinateur équipé du processeur Premium, 250€ sur un modèle équipé du processeur P20 et 120€ sur un modèle équipé du processeur P30.

a) Déterminer la loi de probabilité du gain de l'assembleur.

b) Déterminer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter le résultat.

4. Un grossiste achète a cet assembleur 3 ordinateurs, au hasard et de manière indépendante, quelle est la probabilité que 2 ordinateurs exactement soient équipés d'un processeur Premium.

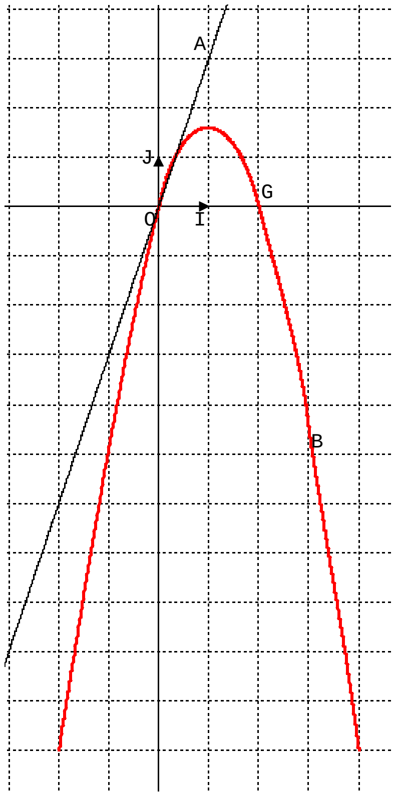
<u>Exercice 3:</u> ***4 points***

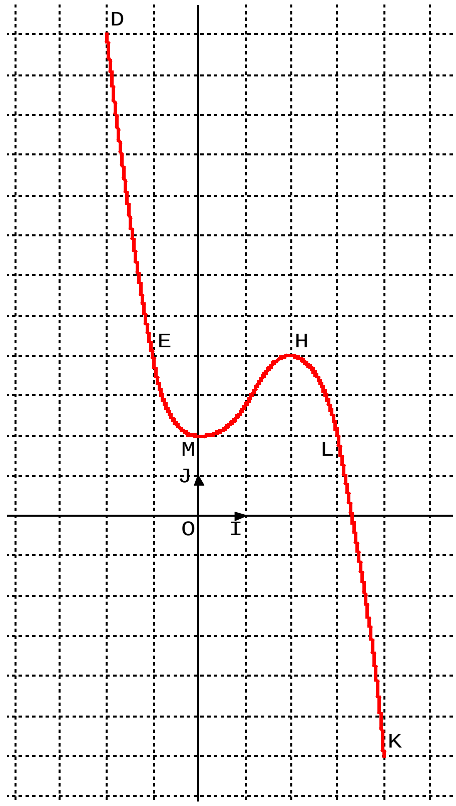
Pour chacune des affirmations suivantes, numérotées de 1 à 8, dire si elle est vraie ou fausse, sans justification. A chaque affirmation et affecté un certain nombre de points :

- *une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ;*
- *une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés ;*
- *une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève rien.*

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Soient f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-2 ; 4] et F une primitive de f sur l'intervalle $[-2;4]$. Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal (O, $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$).

<table>
<tr><td>La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P).</td><td>La courbe Γ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction F dans le plan (P).</td></tr>
<tr><td>


On précise que les points $B(3;-4,5)$, $O(0;0)$ et $G(2;0)$ sont des points de la courbe (C) et que la droite (OA) est tangente en O à la courbe (C) où $A(1;3)$</td><td>


On précise que les points $D(-2;12)$; $E(-1;4)$; $M(0;2)$; $H(2;4)$; $K(4;-6)$; $L(3;2)$ sont des points de la courbe Γ.</td></tr>
</table>

1. La courbe (C) est la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction F.

2. f '(0)=-3.

3. F'(2)=0.

4. La fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle [1 ; 4].

5. La fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle [0 ; 2].

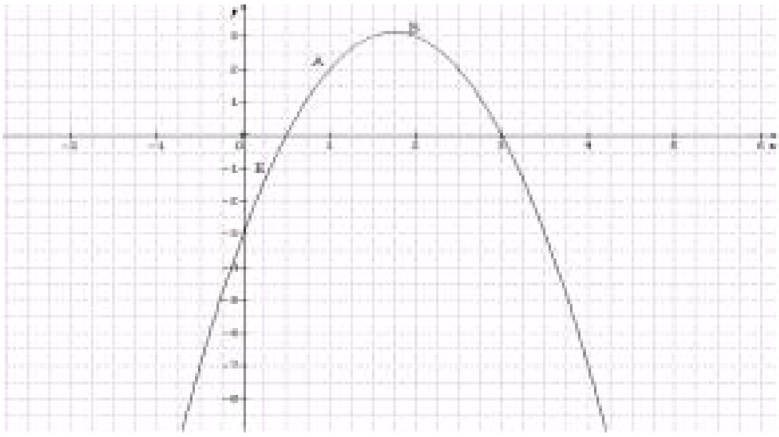
6. Le coefficient directeur de la tangente en L à la courbe Γ est -4.

7. On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan (P) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$. On a $\mathcal{A}$ = 1.

8. $\int_2^4 f(x)dx = -11$.

<u>Exercice 4:</u> (pour les élèves ne suivant pas la spéciatité maths) ***5 points***

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. On désigne par a, b et c trois réels, et on considère la fonction f définie sur [0;4] par $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ dont on donne ci-dessous la représentation graphique Γ . les points A et B sont deux points de Γ ; la tangente à la courbe Γ au point A passe par le point E (0; -1).



1. A l'aide du graphique :
   a) Donner l'image par f de 1, puis l'image par f de 2.
   b) Donner la valeur de f '(1).
2. Déterminer les trois réels a, b et c à l'aide des résultats précédents.
3. Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = \text{Ln}(-2x^2 + 7x - 3)$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition I de g.
   b) Résoudre l'équation $g(x) = \text{Ln}(3 - x)$
   c) Résoudre l'équation : $g(x) - 2\text{Ln}\,3 = \text{Ln}\left(\frac{2}{9}\right)$

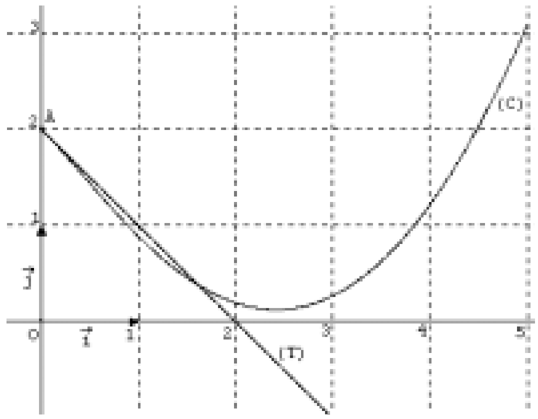
<u>Exercice 4':</u> (pour les élèves suivant la spécialité maths) ***5 points***

Une usine désire diminuer sa production de matières polluantes. On note u_n la masse de matières polluantes, en kg, n mois après le début de la mise en place du système. On donne $u_0 = 300$, $u_1 = 180$ et $u_{n+2} = 1{,}3u_{n+1} - 0{,}4u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Soit les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout n, par $v_n = 2u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} - 0{,}8u_n$.
   a) Montrer que ces suites sont des suites géométriques de raison respectives 0,8 et 0,5 dont on donnera, pour chacune le premier terme.
   b) En déduire v_n , w_n .
   c) Montrer par récurrence que, pour tout n, $u_n = \frac{5v_n}{3} - \frac{10}{3}w_n$, en déduire u_n en fonction de n.
   d) Déterminer la limite de (u_n), le système mis en place va t-il permettre à long terme de diminuer la production de polluant ?
3. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & 1{,}3 \end{pmatrix}$
   a) Vérifier que , pour tout n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$
   b) En déduire que, pour tout n : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.
   c) Calculer alors à l'aide de la calculatrice la production de polluant au bout de 10 mois d'utilisation.

NOM :

<u>Exercice 1:</u>



<u>Exercice 3:</u>

question	*Vrai ou faux*
1.(C) courbe de F	
2 .f '(0) = -3	
3. F'(2) =0	
4. f (x) $\leq$ 0 sur [1;4]	
5. f(x) $\geq$ 0 sur [0;2]	
6. coeff directeur de T est -4	
7. A = 1	
8. $\int_2^4 f(x)dx = -11$	