Le 18/03/2004

MATHEMATIQUES

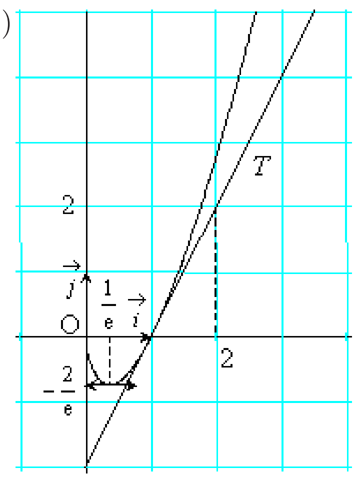
Baccalauréat Blanc

Sujet obligatoire

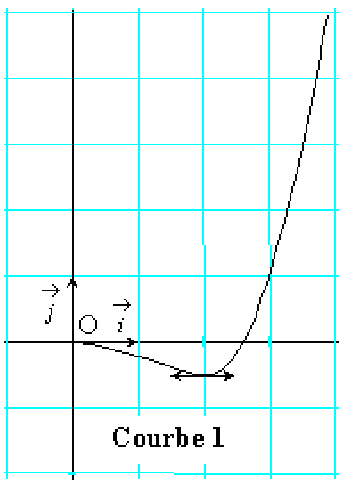
L'usage de la calculatrice est autorisé Durée : 3h

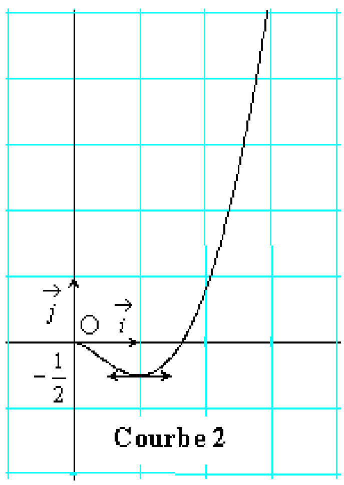
Exercice 1: (4 *points*)

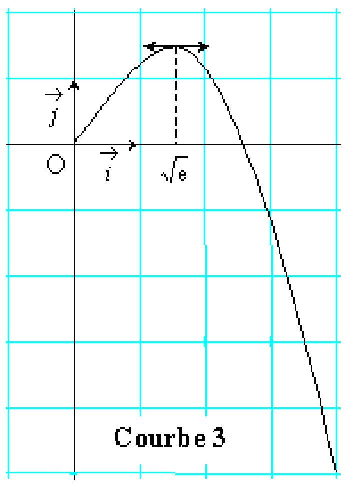
La courbe ci-contre est la représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Par lecture graphique :
   (a) Donner les valeurs de $f\left(\frac{1}{e}\right)$, de $f'(1)$.
   (On expliquera ce que représente $f'(1)$.)
   (b) Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; 3]$.
2. On admet que f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
   $f(x) = (ax + b) \ln x$ où a et b sont des nombres réels.
   (a) Soit f' la fonction dérivée de f.
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1.a).
3. L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
   Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons de ce choix.

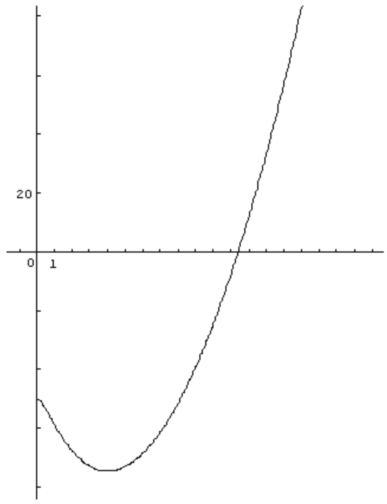






Exercice 2: (5 *points*) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit f une fonction définie sur $[0;50]$ par :
$f(x) = x^2 + \dfrac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1) - 50$.
La courbe représentant f est donnée ci-contre :
Soit α un nombre réel de l'intervalle $]11;12[$.
On admet que $f(x) < 0$ pour $x \in [0;\alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;50]$.
Pour l'exercice, on prendra $\alpha = 11$.



PARTIE A

Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit. Le coût marginal C, exprimé en euros est défini sur $[0;50]$ par : $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x+1}$.

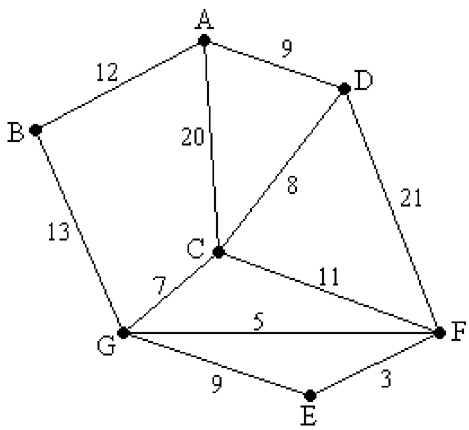
1. La fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur $[0;50]$ qui prend la valeur 50 pour $x = 0$.
   Vérifier que $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$.
2. Le coût moyen est la fonction C_m définie par $C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ sur $]0;50]$.
   (a) Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x.
   (b) Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme : $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

PARTIE B

1. Déduire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0;50]$.
   (On ne demande pas les valeurs ou limites aux bornes.)
2. Quelle est la production donnant un coût moyen minimal ?
   Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

Exercice 2: (5 *points*) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A.
Un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F et G.
Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. (a) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.
   (b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.
2. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

Exercice 3: (5 *points*)

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peint un quart de la production. On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95. Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage. On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.

On note : A_1 l'événement : « le jouet est peint par M_1 »
A_2 l'événement : « le jouet est peint par M_2 »
B l'événement : « le jouet est peint correctement ».

1. (a) Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   (b) Définir par une phrase l'événement $A_1 \cap B$.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement $A_1 \cap B$.
   (d) Montrer que la probabilité de l'événement B, notée p, est égale à 0,925.
   (e) Le jouet choisi est peint correctement.
   Quelle est la probabilité pour qu'il ait été peint par la machine M_1 ?
2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à* 10^{-2} *près.*
   On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   (a) Quelle est la probabilité pour que les 4 jouets soient peints correctement ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

<u>Exercice 4:</u> (6 *points*)

*Le but de l'exercice est l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (**Partie B**), en s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (**Partie A**).*

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1+\ln x}{x^2}$.

Certains renseignements concernant la fonction f sont consignés dans le tableau suivant :

x	1	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↗	$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$	↘ $\frac{1}{2}$

1. (a) Montrer que, pour x élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{3-2\ln x}{x^3}$ où f' désigne la dérivée de f.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x, et retrouver les variations de f données dans le tableau (aucun calcul de limite n'est demandé).
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;e]$.
3. En utilisant les résultats précédents et le tableau de variation de f, donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.)
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[g(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right] = 0$.
   Interpréter ce résultat pour la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.
2. Montrer que la fonction f étudiée dans la **partie A** est la fonction dérivée de g.
   En déduire le sens de variation de g.
3. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e, et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Justifier que T est parallèle à D.

Correction du Bac Blanc

Exercice 1:

1. (a) Par lecture graphique : $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{2}{e}$

   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Donc $f'(1) = 2$.

   (b) tableau de signes de f :

x	0		1		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $f(x) = (ax+b)\ln x$

   (a) $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = ax+b$; $u'(x) = a$

   $v(x) = \ln x$; $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $f' = u'v + uv'$ d'où $f'(x) = a\ln x + (ax+b) \times \dfrac{1}{x} = a\ln x + \dfrac{ax+b}{x}$

   (b) On a $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{2}{e} \\ f'(1) = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(a \times \dfrac{1}{e} + b\right)\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{a}{e} + b\right) \times (-1) = -\dfrac{a}{e} - b \\ f'(1) = a\ln 1 + \dfrac{a \times 1 + b}{1} = a + b \end{cases}$

   On a alors : $\begin{cases} -\dfrac{a}{e} - b = -\dfrac{2}{e} \\ a + b = 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} -a - be = -2 \\ a + b = 2 \end{cases}$

   et on obtient : $-be + b = 0$ c'est à dire $b = 0$ et $a = -b + 2 = 2$

   Donc $f(x) = 2x\ln x$.

3. On sait que $f(x) > 0$ sur $]1;3]$, donc en particulier sur $]1;2]$, donc les primitives de f sont strictement croissantes sur $]1;2[$, ce qui exclut les courbes 1 et 3.

   Donc c'est la courbe 2 qui représente une primitive de f.

Exercice 2: **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit f une fonction définie sur $[0;50]$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1) + 50$.

$f(x) < 0$ pour $x \in [0;\alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;50]$. On prend $\alpha = 11$.

PARTIE A

Le coût marginal C est défini sur $[0;50]$ par : $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x+1}$.

1. Montrons que $C_T'(x) = C(x)$ et $C_T(0) = 50$

   $C_T(x) = x^2 + 50\ln(u(x)) + 50$ où $u(x) = x+1$; $u'(x) = 1$

   $C_T'(x) = 2x + 50 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 2x + \dfrac{50}{x+1} = C(x)$

   de plus $C_T(0) = 0^2 + 50\ln(0+1) + 50 = 50$, donc on a bien $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$ comme fonction coût total.

2. $C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ pour $x \in]0;50]$.

   (a) $C_m(x) = \dfrac{x^2 + 20\ln(x+1) + 50}{x} = x + 50\dfrac{\ln(x+1)}{x} + \dfrac{50}{x}$

   (b) $C_m(x) = x + 50 \times \dfrac{1}{x} + 50 \times \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln(x+1)$; $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   $v(x) = x$; $v'(x) = 1$

   $C_m'(x) = 1 + 50 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 50 \times \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

   $C_m'(x) = 1 - \dfrac{50}{x^2} + 50 \times \dfrac{\frac{1}{x+1} \times x - \ln(x+1) \times 1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 50 + \frac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x^2}$

PARTIE B

1. $C'_m(x)$ est alors du signe de $f(x)$ car $x^2 > 0$ sur $]0;50]$,
   d'où $C'_m(x) > 0$ sur $]\alpha;50]$ et $C'_m(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$.
   Tableau de variation de C_m :

x	0		α		50
$C'_m(x)$	||	$-$	0	$+$	
C_m	||	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	

2. Le coût moyen minimal est atteint pour $x = \alpha$,
   c'est à dire pour environ pour une production de 11 kg.
   $C_T(11) = 11^2 + 50\ln(11+1) + 50 = 171 + 50\ln 12 \simeq 295$.
   $C(11) = 2 \times 11 + \dfrac{50}{11+1} = 22 + \dfrac{50}{12} \simeq 26$.
   Pour un coût moyen minimal, on a un coût total d'environ 295€ et un coût marginal d'environ 26€.

Exercice 2: **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. (a) Il existe une chaîne eulérienne car il n'y a que deux sommets d'ordre impair : A et D.
   Comme le guide part du sommet A, il pourra emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux.
   (b) Non, car il n'existe pas de cycle eulérien car les sommets ne sont pas tous d'ordre pair.

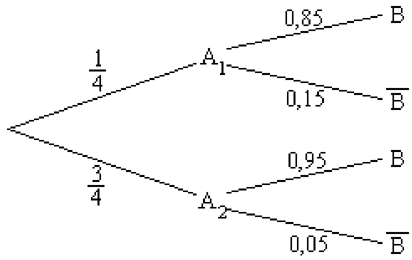
2.

	B	C	D	F	G	E
A	12(A)	20(A)	9(A)			
D		17(D)		30(D)		
B					25(B)	
C				28(C)	24 (C)	
G				29(G)		33(G)
F						31(F)

La plus courte chaîne est alors ADCFE de poids 31. Le plus court chemin de A à E est donc de 31 km.

Exercice 3:

1. (a) on a $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$; $P(A_2) = \dfrac{3}{4}$; $P_{A_1}(B) = 0,85$ et $P_{A_2}(B) = 0,95$
   arbre pondéré :



   (b) $A_1 \cap B$ est l'événement : « le jouet a été peint par la machine M_1 et il a été correctement peint ».
   (c) $P(A_1 \cap B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) = 0,85 \times \dfrac{1}{4} = 0,2125$
   (d) $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$ d'après la formule des probabilités totales
   $= 0,2125 + P_{A_2}(B) \times P(A_2) = 0,2125 + 0,95 \times \dfrac{3}{4} = 0,925$.
   (e) On cherche $P_B(A_1)$
   $P_B(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2125}{0,925} \simeq 0,23$

2. On choisit au hasard et de façon indépendante quatre jouets. On est alors en présence d'un schéma de Bernoulli.

   (a) Soit X le nombre de jouets peints correctement. On cherche alors $P(X = 4)$.
   $P(X = 4) = (P(B))^4 = (0,925)^4 \simeq 0,73$

   (b) On cherche $P(X \leq 3)$
   $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) \simeq 0,27$

Exercice 4:

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1+\ln x}{x^2}$.

1. (a) Pour $x \in [1;+\infty[$,

   $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = -1 + \ln x$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $v(x) = x^2$; $v'(x) = 2x$

   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(-1+\ln x)}{(x^2)^2} = \dfrac{x - 2x(-1+\ln x)}{x^4} = \dfrac{1+2-2\ln x}{x^3} = \dfrac{3-2\ln x}{x^3}$

   (b) $x^3 > 0$ sur $[1;+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $3 - 2\ln x$

   $3 - 2\ln x > 0$ nous donne $\ln x < \dfrac{3}{2}$ d'où $x < e^{\frac{3}{2}}$

   donc $f'(x) > 0$ sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$

   donc f est bien strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et strictement décroissante sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$.

2. $e \in [1;e^{\frac{3}{2}}[$, f est continue sur $[1;+\infty[$, de plus f est strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$

   $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(e) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1+\ln e}{e^2} = \dfrac{1}{2} > 0$

   donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1;e[$.

3. On a $f(x) < 0$ sur $]1;e[$, $f(x) > 0$ sur $]e;+\infty[$ et $f(x) = 0$ pour $x = e$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + 1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   (b) $g(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = -\dfrac{\ln x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = 0$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   (c) $x > 0$ sur $[1;+\infty[$ et $-\ln x > 0$ donne $\ln x < 0$ d'où $0 < x < 1$

   mais $x \in [1;+\infty[$, donc pour tout $x \in]1;+\infty[$, $-\ln x < 0$, ce qui donne $g(x) - \left(\dfrac{1}{2}x+1\right) < 0$

   Donc la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de D sur $]1;+\infty[$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $v(x) = x$; $v'(x) = 1$

   $g' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1+\ln x}{x^2} = f(x)$

3. Le coefficient directeur de T est égal à $g'(e) = f(e)$ or $f(e) = \dfrac{1}{2}$

   Donc T et D ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.