Baccalauréat blanc
Classe de terminale ES

Année scolaire 2003 - 2004

On veillera à détailler et à rédiger clairement les raisonnements, à soigner son écriture et sa présentation. Il en sera tenu largement compte.

La calculette graphique est autorisée mais aucun document ni formulaire n'est autorisé.

Le sujet se compose de quatre exercices pour tous les candidats

Énoncé

Exercice 1 - sur 4 points

Au jeu télévisé de la fortune, le candidat, au téléphone, choisit et désigne deux boules parmi les 8 boules virtuelles qui lui sont présentées à l'écran (chacune d'elles est numérotée pour faciliter la désignation). Les boules choisies alors se retournent simultanément et une indication apparaît. Trois boules sont porteuses de l'indication 1000 €, deux boules portent l'indication 3000 €, une boule porte l'indication 10 000 €, une boule porte le dessin d'un trèfle à quatre feuilles et la boule restante porte le dessin d'une tête grimaçante.

La règle du jeu est la suivante :
– si les deux boules choisies portent des sommes, le candidat gagne ces sommes.
– si le candidat tombe sur le trèfle, et une boule portant une somme, il gagne le double de la somme indiquée.
– si le candidat tire la tête grimaçante parmi ses deux boules, il ne gagne rien.

Dresser la liste des gains possibles pour un candidat et la loi de probabilité concernant ces gains (on utilisera un graphique, un tableau, ou un arbre pour présenter les méthodes de calcul et les résultats)

Quelle est la probabilité d'obtenir un gain supérieur à 10 000 € dans ce jeu ? Quelle est celle de ne rien gagner ?

Exercice 2 - sur 7 points

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1. **a)** Calculer la limite de f en -1 (à droite). Interpréter graphiquement le résultat.

   b) En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de $f(x)$.
3. **a)** Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

   $$\alpha < 0 < \beta \quad \text{et} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

   b) donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et β.

   c) en déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

   $$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

   a) calculer $g'(x)$.

   b) en déduire, l'expression de la primitive F de f s'annulant pour $x = 0$.

   c) En admettant que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} F(x) = 1$ dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

D'après le sujet du Bac ES
Amérique du Nord - Juin 2003

Exercice 3 - Enseignement de spécialité - sur 5 points

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + 4$$

où a désigne un nombre réel.

On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. Calculer v_n en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n. Étudier la convergence de la suite de terme général S_n. En déduire la limite de la suite ayant pour terme général la somme $\Sigma_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

D'après un exercice du Bac ES
in TES Éditions Breal

Exercice 3 - Candidats non spécialistes - sur 5 points

La courbe (C) est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;3]$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La courbe (C) vérifie les quatre conditions suivantes : elle passe par l'origine O du repère et par le point $A(-3\,;9)$; elle admet au point B d'abscisse 1 une tangente horizontale et elle admet la droite (OA) pour tangente en O.

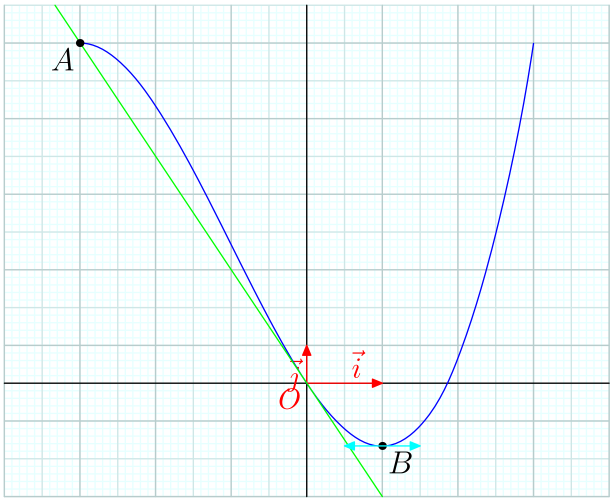

Fig. 1 – Courbe (C) représentative de f

1. Quel est le coefficient directeur de la droite (OA) ?

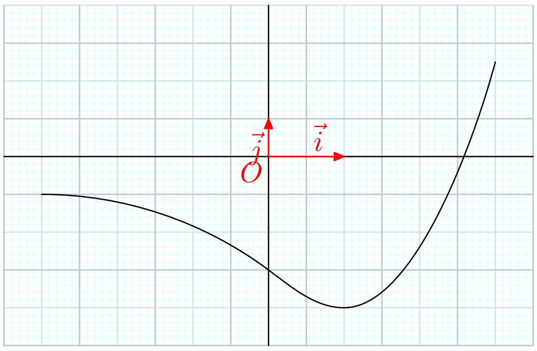

Schéma 1

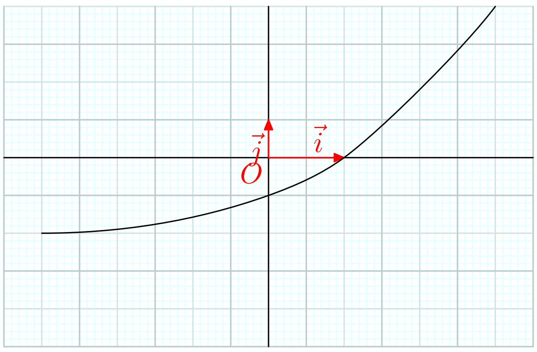

Schéma 2

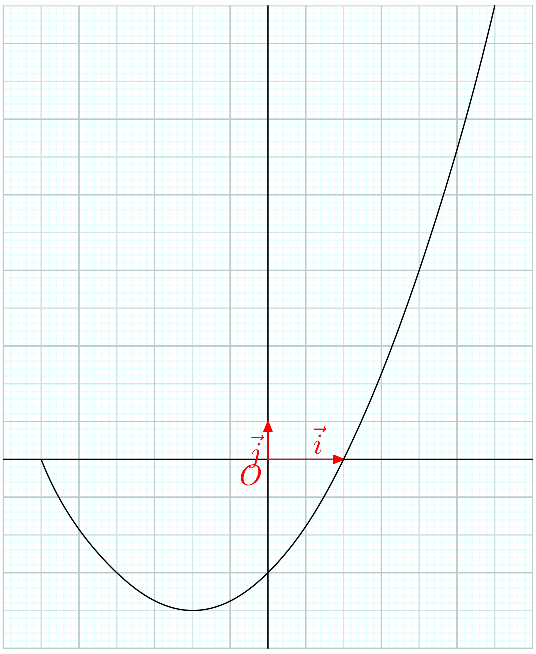

Schéma 3

2. L'un des trois schémas numérotés 1, 2 et 3 est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Indiquer le numéro de cette figure en précisant les raisons de votre choix.
3. On suppose que f est définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c, et d sont des réels.

a) Montrer en utilisant les quatre conditions de départ que :

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 1, \quad c = -3, \quad d = 0$$

b) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Factoriser $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur $[-3\,;3]$.

D'après le sujet du Bac ES
Polynésie - Juin 2001

Exercice 4 - sur 4 points

1. L'équation $-3x^2 + bx + c = 0$ dans laquelle x est une variable réelle, (b et c sont des réels inconnus) admet deux solutions x_1 et x_2, telles que $x_1 < x_2$.
En déduire l'exactitude ou l'inexactitude des affirmations ci dessous. Une bonne réponse apporte des points, une mauvaises réponse en retire. Si la note globale est inférieure à 0 elle sera ramenée à 0. L'absence de réponse ne retire ni n'apporte de point. Il n'est pas demandé de justifier les réponses : on se contentera d'écrire : « Affirmation n° … : VRAI » ou « Affirmation n° … : FAUX »

<table>
<tr><th>N°</th><th>Affirmation</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Si $x_1 < 0 < x_2$, le signe de $-3x^2+bx+c$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, est indiqué par le tableau :
<table><tr><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\ln(-3x^2 + bx + c)$ est défini sur $[x_1\,;x_2]$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Sur $]x_1\,;x_2[$ on peut écrire :
$$\ln(-3x^2 + bx + c) = \ln[-3(x - x_1)] + \ln(x - x_2)$$
.</td></tr>
</table>

2. **a)** Résoudre l'équation : $x \in]1\,;2[$, $\ln(3x - 1) + \ln(2 - x) = 0$

b) Résoudre l'inéquation : $x \in]1\,;2[$, $\ln(3x - 1) + \ln(2 - x) > 1$

1 Corrigé

Exercice 1

Considérons, dans un premier temps, qu'un résultat est constitué par deux boules virtuelles que choisit le candidat, indépendemment des indications qu'elles portent. On considère que toutes les paires de boules ont la même probabilité d'être choisies. Considérons également que l'ordre dans lequel le candidat choisit ses boules n'a aucune importance dans l'application de règles du jeu.

Pour dresser la liste complète des résultats possibles on s'aidera d'un tableau dans lequel chaque boule est désignée par son numéro. Ces résultats constituent « *l'univers des possibles* » Ω.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}	{1,7}	{1,8}
2			{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}	{2,7}	{2,8}
3				{3,4}	{3,5}	{3,6}	{3,7}	{3,8}
4					{4,5}	{4,6}	{4,7}	{4,8}
5						{5,6}	{5,7}	{5,8}
6							{6,7}	{6,8}
7								{7,8}
8								

On dénombre donc 28 résultats équiprobables (les cases vides correspondent à des résultats impossibles ou à des résultats déjà indiqués mais écrits dans un ordre différent).

Dans un deuxième temps, faisons figurer dans ce tableau, les inscriptions portées sur les boules, et les sommes gagnées dans le respect de la règle du jeu.

	1 000	1 000	1 000	3 000	3 000	10 000	♣	☹
1 000		2 000	2 000	4 000	4 000	11 000	2 000	0
1 000			2 000	4 000	4 000	11 000	2 000	0
1 000				4 000	4 000	11 000	2 000	0
3 000					6 000	13 000	6 000	0
3 000						13 000	6 000	0
10 000							20 000	0
♣								0
☹								

Ainsi, l'événement :

$$E_{4000} = \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\}\}$$

est l'ensemble des résultats qui conduisent le joueur à gagner 4 000 €. Sa probabilité est la somme des probabilités des résultats élémentaires ou, ce qui revient au même puisque les résultats sont équiprobables :

$$P(E_{4000}) = \frac{\text{Card}(E_{4000})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

On peut ainsi dresser la loi de probabilité des gains à ce jeu, en considérant l'ensemble des gains possibles, Ω_G, nouvel univers probabiliste :

Gains	0	2 000	4 000	6 000	11 000	13 000	20 000
Probabilité	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$
$\approx$	0,25	0,21	0,21	0,11	0,11	0,07	0,04

La probabilité de ne rien gagner à ce jeu est donc $0,23$. Celle de gagner plus de 10 000 € est la probabilité de l'événement :

$$E_{>10\,000} = \{11\,000, 13\,000, 20\,000\}$$

On l'obtient en ajoutant les probabilité des résultats élémentaires qui le constituent :

$$P(E_{>10\,000}) = \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{3}{28} = \frac{3}{14} \approx 0,21$$

Exercice 2

Question 1

Selon les propriétés des limites de sommes et de fonctions composées :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+1) = -\infty \\ \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-1} (-2x+5) = 7\end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$$

Ce résultat montre que la représentation graphique de la fonction f, dans un repère orthogonal, admet une asymptote verticale d'abscisse -1.

D'autre part, pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ distinct de 0, on peut écrire :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1) = x\left(-2 + \frac{5}{x} + 3 \times \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$ (admis), et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(3\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=0\\ \text{et}\quad &\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{5}{x}\right)=-2\end{aligned}\right\}\quad \text{donc}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{5}{x}+3\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=-2$$

Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, nous pouvons conclure, selon les propriétés des limites d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

Question 2

Soit u la fonction, définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $u(x)=x+1$.
Soit v la fonction, définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $v(x)=-2x+5$.

On a $f=v+3\ln\circ u$ et par conséquent,

$$f'=v'+3u'\times\frac{1}{u}$$

Pour tout réel x de l'intervalle de définition, on a donc :

$$f'(x)=-2+\frac{3}{x+1}=\frac{-2x+1}{x+1}$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$, étudions le signe de son numérateur et celui de son dénominateur, d'abord sur $\mathbb{R}$:

$x+1=0$ équivaut à $x=-1$
$x+1>0$ équivaut à $x>-1$
$x+1<0$ équivaut à $x<-1$

Donc le signe de $x+1$ se résume à :

$-\infty$		-1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	

$-2x+1=0$ équivaut à $\frac{1}{2}=x$
$-2x+1>0$ équivaut à $\frac{1}{2}>x$
$-2x+1<0$ équivaut à $\frac{1}{2}<x$

Donc le signe de $-2x+1$ se résume à :

$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
	$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ on a donc :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$x+1$	0		$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1\,;\frac{1}{2}[$, strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$. Elle admet une image maximale pour la valeur $\dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 4 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 5,22$$

Ces résultats, avec ceux de la question 1, sont regroupés dans le tableau de variations ci-dessous :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$4+3\ln(\frac{3}{2})$	$\searrow$	$-\infty$

Question 3

Calculons[1] :

$$\begin{aligned} f\left(-1+e^{-3}\right) &= -2(-1+e^{-3}) + 5 + 3\ln\left(e^{-3}\right) \\ &= 7 - 2e^{-3} - 9 = -2(1+e^{-3}) \\ f(0) &= 5 + 3\ln(1) = 5 \end{aligned}$$

On constate que le réel $-1+e^{-3}$ a une image négative alors que 0 a une image positive.

Comme la fonction f est continue (puisqu'elle est dérivable), elle ne peut passer d'une image négative à une image positive sans avoir une image nulle. Il existe donc au moins un réel, noté α, dans l'intervalle $]-1+e^{-3}\,;0[$, tel que $f(\alpha)=0$. Comme $(-1+e^{-3})$ et 0 appartiennent à $]-1\,;\frac{1}{2}[$, α appartient aussi à cet intervalle.

De plus, on a démontré que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,\frac{1}{2}[$. Il n'est donc pas possible que sur cet intervalle deux réels distincts aient la même image. Cela montre qu'un seul réel de cet intervalle a pour image 0.

Conclusion : Il existe un et un seul réel de l'intervalle $]-1,\frac{1}{2}[$ ayant pour image 0. Ce réel, noté α est inférieur à 0.

De même, calculons[2] :

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 + 3\ln(2) = 3(1+\ln(2)) \\ f(e^3-1) &= -2(e^3-1) + 5 + 3\ln(e^3) = -2e^3 + 7 + 9 \\ &= -2(e^3-8) = -2(e-2)(e^2+2e+4) \end{aligned}$$

On constate que 1 a une image positive et e^3-1 a une image négative. Comme précédement, on en déduit (dans l'ordre) :

[1]Dans ces calculs, on a pris des valeurs qui permettent de se passer de calculette (qui peut ne pas être autorisée à l'examen). On aurait pu prendre des réels décimaux pour réaliser les mêmes calculs, et aboutir aux même conclusioons à condition d'utiliser la calculette. On aurait pu aussi utiliser les limites trouvées plus haut.

[2]On utilise ici l'identité : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

– qu'il existe au moins un réel β de $[1\,;e^3-1]$ ayant une image nulle puisque f est continue.
– que ce réel appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.
– que c'est le seul de l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ à avoir une image nulle puisque sur cet intervalle f est décroissante.
– qu'il est supérieur à 0.

Conclusion : Il existe un et un seul réel de l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ ayant pour image 0. Ce réel, noté β est supérieur à 0.

Approximations : La calculette indique :

$$f(-0,9) = -0,107$$
$$f(-0,89) = 0,15818$$

On en conclut :

– que $\alpha < -0,89$ car le contraire ($\alpha \geqslant -0,89$) entrainerait, avec la croissance de f, $f(\alpha) \geqslant f(-0.89)$, c'est à dire $0 \geqslant 0,15818$.
– que $\alpha > -0,9$ car le contraire ($\alpha \leqslant -0,9$) entrainerait, avec la croissance de f, $f(\alpha) \leqslant f(-0.9)$, c'est à dire $0 \leqslant -0,107$.

On a donc : $\alpha \in]-0,9\,;-0,89[$ et par conséquent $-0,9$ est une valeur approchée de α à 10^{-2} près, par défaut.

De même, la calculette donne :

$$f(5,24) = 0,1294$$
$$f(5,25) = -0,0023$$

On en conclut que $\beta > 5,24$ et $\beta < 5.25$. En effet, avec la décroissance de f, les propositions contraires conduisent à l'absurde.

Le réel $5,24$ est donc une approximation de β à 10^{-2} près, par défaut.

Signe de $f(x)$

On a vu que f est croissante sur $]-1\,;\frac{1}{2}[$. Elle conserve donc l'ordre, ce qui signifie que :

– si $\alpha < x < \frac{1}{2}$, alors $f(\alpha) < f(x)$ et donc $0 < f(x)$
– si $-1 < x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$ et donc $f(x) < 0$

Résumons par un tableau :

x	-1		α		$\frac{1}{2}$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On a vu également que f est décroissante sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$. Elle change donc l'ordre :

– si $\frac{1}{2} < x < \beta$ alors $f(x) > f(\beta)$ et donc $f(x) > 0$
– si $\beta < x$ alors $f(\beta) > f(x)$ et donc $0 > f(x)$

d'où le tableau :

x	$\frac{1}{2}$		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Le signe de $f(x)$ sur l'ensemble de définition de f est donc indiqué par le tableau :

x	-1		α		β		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Question 4

Dérivée de g

Soit Id la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $Id(x) = x$. En reprenant la fonction u définie dans la question 2, on a :

$$g = u \times \ln \circ u - Id$$

La dérivée de $\ln \circ u$ est $\dfrac{u'}{u}$ donc, selon les propriétés de dérivation des produits et des sommes :

$$g' = u' \times \ln \circ u + u \times \frac{u'}{u} - Id' = u' \times \ln \circ u + u' + Id'$$

On en déduit : $g'(x) = 1 \times \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1)$

Primitive de f

Puisque $g'(x) = \ln(x+1)$, on peut conclure que g est une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x+1)$. En conséquence, les primitives de la fonction f sont de la forme :

$$F : x \longmapsto -x^2 + 5x + 3\,g(x) + K \qquad K \text{ étant une constante réelle}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= -x^2 + 5x + 3(x+1)\ln(x+1) - 3x + K \\ &= -x^2 + 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + K \end{aligned}$$

Dans ces conditions, $F(0) = K$ et, pour que F s'annule en 0, il suffit de prendre $K = 0$.

La primitive F_0 de f qui s'annule pour $x = 0$ est donc définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$F_0 : x \longmapsto -x^2 + 2x + 3(x+1)\ln(x+1)$$

Tableau de variation de F

La dérivée de la fonction F est connue : c'est f. Le signe de cette dérivée a été déterminé dans la question 4. Le sens des variations de F s'en déduisent.

La limite de F au voisinage de -1 est, par hypothèse, 1. Calculons les images extremales et la limite de F à l'infini.

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= -\alpha^2 + 2\alpha + 3\alpha(\alpha+1)\ln(\alpha+1) \approx -3,3 \\ F(\beta) &= -\beta^2 + 2\beta + 3\beta(\beta+1)\ln(\beta+1) \approx 17,3 \end{aligned}$$

Pour tout réel x non nul de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right) \\ &= x^2\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3(x+1)}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right) \\ &= x^2\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3x+3}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right) \\ &= x^2\left[-1+\frac{2}{x}+\left(3+\frac{3}{x}\right)\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right] \end{aligned}$$

On sait (admis) que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{3}{x}\right)=3$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{2}{x}\right)=-1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-1+\frac{2}{x}+\left(3+\frac{3}{x}\right)\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=-1$$

Finalement,il apparaît que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$.

Tous les éléments permettant d'établir le tableau de variation de F sont établis.

x	-1		α		β		$+\infty$
F	‖ 1	$\searrow$	$F(\alpha)$	$\nearrow$	$F(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3 - Enseignement de spécialité

Question 1

Pour que la suite (v_n) soit géométrique, il faut et il suffit qu'il existe un réel r (la raison) tel que pour tout entier n on ait :

$$v_{n+1} = rv_n$$

Cette condition peut s'exprimer, compte tenu de la définition de la suite (v_n) :

$$u_n + 1 - 6 = r(u_n - 6)$$

On peut aussi l'exprimer en utilisant la relation de récurrence qui définit u_n :

$$\begin{aligned} au_n + 4 - 6 &= r(u_n - 6) \\ au_n - ru_n &= 2 - 6r \\ (a - r)u_n &= 2 - 6r \end{aligned}$$

Cette dernière condition, ne peut être vérifiée, indépendemment de l'entier n, et donc indépendemment de u_n, que dans l'un ou l'autre de ces cas :

$$\begin{cases} a - r = 0 \\ 2 - 6r = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors

$$r = a = \frac{1}{3}$$

La suite (v_n) est alors une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -1.

$$\begin{cases} a - r \neq 0 \\ u_n = \dfrac{2 - 6r}{a - r} \end{cases}$$

Dans ce cas, la suite (u_n) sera constante et chaque terme sera 5.
Comme $v_n = u_n - 6$, la suite (v_n) sera également constante et chaque terme sera -1.
(v_n) sera donc une suite géométrique de raison 1 et de premier terme -1. C'est un cas très particulier ! D'après l'égalité :

$$u_n = \frac{2 - 6r}{a - r}$$

en prenant $u_n = 5$ et $r = 1$, on obtient :

$$a = \frac{1}{5}$$

Question 2

Dans la suite de l'exercice, nous éliminerons le cas où la suite (v_n) est constante, les réponses étant alors évidentes.

Le terme général de la suite (v_n) est : $v_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ puisque le terme général (de rang n) d'une suite géométrique de premier terme p et de raison r est pr^n. La raison étant comprise entre 0 et 1 cette suite géométrique converge vers 0.

Question 3

D'après la définition du terme général de la suite (v_n), on peut écrire :

$$u_n = v_n + 6$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :

$$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

La suite (v_n) convergeant vers 0, la suite (u_n) converge vers 6.

Question 4

Comme la suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -1, la somme S_n est connue :

$$\begin{array}{rcl}
S_n & = & (-1) \times \dfrac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\
& = & (-1) \times \dfrac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\
& = & -\dfrac{3}{2} \times \left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \\
& = & -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n
\end{array}$$

La suite géométrique de terme initial $\dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ converge vers 0, donc la suite (S_n) converge vers $-\dfrac{3}{2}$.

Pour tout entier n, on a :

$$\Sigma_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Comme par définition $u_n = v_n + 6$, on peut exprimer Σ_n en fonction des termes de la suite (v_n) :

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma_n & = & v_0 + 6 + v_1 + 6 + v_2 + 6 + \cdots + v_n + 6 \\
& = & v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + (n+1) \times 6 \\
& = & S_n + 6(n+1) \\
& = & S_n + 6n + 6
\end{array}$$

La suite (S_n) converge vers 0 mais $6n + 6$ ne peut être majoré. La suite (Σ_n) diverge donc vers l'infini.

Exercice 3 - non spécialistes

Question 1

Les points M et N ayant pour coordonnées respectives $M \left| \begin{array}{l} x_M \\ y_M \end{array} \right.$ et $N \left| \begin{array}{l} x_N \\ y_N \end{array} \right.$, le coefficient directeur de la droite (MN) est :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$$

Le coefficient de (OA) est donc :

$$m = \frac{9-0}{-3-0} = -3$$

Question 2

Selon sa représentation graphique, la fonction f est croissante sur $[1\,;3]$. En particulier, elle est croissante sur $[1\,;1,5]$. Sa dérivée f' est donc positive sur cet intervalle.

Cela exclut le schéma 1, puisque sur l'intervalle $[1\,;1,5]$, la fonction représentée donne des images négatives.

Selon le résultat de la question 1, le coefficient directeur de (OA) (tangente en A à la courbe (C)), est -3. Le nombre dérivé de f en 0 est donc -3, ce qui s'écrit : $f'(0) = -3$.

Cela exclut le schéma 2, puisque pour la valeur 0, la fonction représentée donne pour image -1.

Par élimination, c'est donc le schéma 3 qui représente la fonction f'.

Question 3

La fonction f étant de la forme $\quad f : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, sa dérivée f' est de la forme $\quad f' : x \longmapsto 3ax^2 + 2bx + c$.

Traduisons les conditions données :

Condition de départ	Traduction	Expression algébrique
$O \in (C)$	$f(0) = 0$	$d = 0$
$A \in (C)$	$f(-3) = 9$	$-81a + 27b - 3c = 9$
Tangente horizontale en B	$f'(1) = 0$	$3a + 2b = 0$
(OA) est tangente en O	$f'(0) = -3$ (question 1)	$c = -3$

Nous disposons donc de quatre égalités impliquant les réels a, b, c et d :

$$
\begin{aligned}
d &= 0 && (1)\\
-81a + 27b - 3c + d &= 9 && (2)\\
3a + 2b + c &= 0 && (3)\\
c &= -3 && (4)
\end{aligned}
$$

De (4), (1) et (2), on déduit :

$$-81a + 27b + 9 = 9$$

et donc, en ajoutant -9 puis en divisant les deux membres par 27 :

$$-3a + b = 0 \qquad (5)$$

Par ailleurs, les égalités (3) et (4) entrainent :

$$3a + 2b = 3 \qquad (6)$$

et donc, en ajoutant membre à membre (5) et (6), on obtient :

$$3b = 3$$

dont on tire :

$$b = 1 \qquad (7)$$

Avec (5) et (7), on obtient :

$$3a + 2 = 3$$

d'où l'on tire :

$$a = \frac{1}{3} \qquad (8)$$

Les égalités (1), (4), (7) et (8) constituent le résultat attendu.

Nous avons donc : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ et $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Le polynome $x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant 16, il a donc deux racines 1 et -3 ; il se factorise sous la forme :

$$f'(x) = (x+1)(x+3)$$

L'étude du signe de ce produit[3] sur $\mathbb{R}$, permet de trouver le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $[-3\,;3]$:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+1$			$-$		0	$+$	
$x+3$		$-$	0		$+$		
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[3] On pourrait utiliser les propriétés concernant le signe d'un polynôme du second degré, mais nous préférons suivre la demande de l'énoncé.

x	-3		1		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	9	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	9

Exercice 4

Q.C.M.

Affirmation n° 1 : VRAIE Le polynôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 sauf pour les valeurs de la variable comprises entre les racines (et pour les racines).

Affirmation n° 2 : FAUSSE Pour les valeurs x_1 et x_2, le polynôme $-3x^2+bx+c$ s'annule et par conséquent, $\ln(-3x^2 + bx + c)$ n'est pas défini.

Affirmation n° 3 : FAUSSE Sur l'intervalle $]x_1\,;x_2[$, le poslynôme $-3x^2+bx+c$ est positif. Par contre, $x-x_2$ est négatif puisque x_2 est supérieur à tous les réels de l'intervalle. L'écriture $\ln(x - x_2)$ n'a donc pas de sens.

Équation

$3x - 1$ est positif lorsque $x \in]\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

$2 - x$ est positif lorsque $x \in]-\infty\,;2[$.

Sur l'intervalle $]1\,;2[$, $3x-1$ et $2-x$ sont donc tous les deux positifs, ce qui permet aux expressions $\ln(3x - 1)$ et $\ln(x - 2)$ d'être des réels définis.

Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll}
\ln(3x-1)+\ln(2-x)=0 & \\
\ln[(3x-1)(2-x)]=0 & \text{car } \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b) \text{ lorsque } a\in\mathbb{R}_+^* \text{ et } b\in\mathbb{R}_+^* \\
(3x-1)(2-x)=1 & \text{car seul } \ln(1)=0 \\
-3x^2+7x-2=1 & \\
-3x^2+7x-3=0 &
\end{array}$$

Le polynôme du second degré $-3x^2 + 7x - 3$ a pour discriminant 13. Il admet donc, dans $\mathbb{R}$ deux racines :

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{13}}{-6} \approx 1,76 \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-7+\sqrt{13}}{-6} \approx 0,56$$

Dans l'intervalle $]1\,;2[$ les équations ont donc une seule solution : $\dfrac{-7-\sqrt{13}}{-6}$

Inéquation

Comme l'équation précédente, et pour les mêmes raisons, l'inéquation proposée a bien du sens sur l'intervalle $]1\,;2[$. Sur cet intervalle, elle est équivalente aux inéquations suivantes :

$\ln[(3x-1)(2-x)] > 1$	car $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ lorsque $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$
$\ln[(3x-1)(2-x)] > \ln(e)$	car $\ln(e) = 1$
$-3x^2 + 7x - 2 > e$	car la fonction logarithme est croissante
$-3x^2 + 7x - 2 - e > 0$	

Le polynôme du second degré $-3x^2 + 7x - 2 - e$ a pour discriminant :

$$\Delta = 49 - 12(2 + e) \approx -7,6$$

Il n'admet donc dans $\mathbb{R}$ aucune racine et est négatif pour toute valeur de x.

Sur $]1\,;2[$ les inéquations n'ont donc pas de solution.