Terminale ES — mardi 20 janvier — Durée : 3 heures

Baccalauréat blanc

Aucun document autorisé. La qualité de la rédaction et des justifications rentrera pour une large part dans l'appréciation des copies.

PROBLÈME

Les objectifs de ce problème sont l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (partie B), s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (partie A).

I.A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5\ln(x)$.

1. Étudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1;7]$. On note α cette solution.

   (b) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

I.B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-5)\ln(x)}{x}$. On peut donc aussi écrire :
$f(x) = \frac{1}{x}(x-5)\ln(x)$ et $f(x) = \ln(x) - \frac{5\ln(x)}{x}$.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$)
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

   (b) Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   (a) Soit A le point de la courbe C, d'abscisse 1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$, tangente en A à la courbe C. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

   (b) Tracer $\mathcal{D}$ et C sur papier millimétré. (Unité graphique : 2 cm).

Exercice 1 Une certaine espèce de coléoptère voit sa population augmenter de 3% par an. Partant d'une population de 9 000 coléoptères, au bout de combien d'années aura-t-on au moins 27 000 coléoptères ?

Exercice 2 Le but de cet exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. On dispose des informations suivantes :

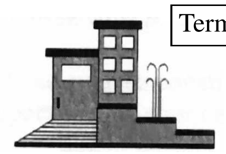
- Un quart de la population a été vaccinée contre la maladie.
- Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a 1 vacciné sur 13 parmi les malades.
- La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est vacciné est égale à 0,1. Pour une personne choisie au hasard, on notera :
- M l'événement «Être malade», $\overline{M}$ son contraire ;
- V l'événement « Être vacciné», $\overline{V}$ son contraire.

1. On choisit au hasard une personne dans la population. Décrire à l'aide de M et V les diverses situations possibles de cette personne en ce qui concerne la vaccination et l'atteinte par la maladie (par exemple : « Être malade et être vacciné », etc.) Traduire en langage des probabilités, les hypothèses de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité de l'événement $M \cap V$ notée $p(M \cap V)$. En déduire que la probabilité $p(M)$ de l'événement M est égale à $\frac{13}{40}$.
3. (a) Calculer la probabilité de l'événement «Être malade et ne pas être vacciné» notée $p(M \cap \overline{V})$.

   (b) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade sachant qu'elle n'est pas vaccinée, notée $P_{\overline{V}}(M)$.
4. Déterminer le réel k tel que :

$$P_V(M) = k \cdot P_{\overline{V}}(M)$$

   et traduire cette égalité par une phrase.



Terminale ES — mardi 20 janvier — Durée : 3 heures

Baccalauréat blanc

Spécialité mathématiques

Aucun document autorisé. La qualité de la rédaction et des justifications rentrera pour une large part dans l'appréciation des copies.

PROBLÈME

Les objectifs de ce problème sont l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (partie B), s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (partie A).

I.A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5\ln(x)$.

1. Étudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1; 7]$. On note α cette solution.
   (b) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

I.B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-5)\ln(x)}{x}$. On peut donc aussi écrire :
$f(x) = \frac{1}{x}(x-5)\ln(x)$ et $f(x) = \ln(x) - \frac{5\ln(x)}{x}$.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$)
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   (a) Soit A le point de la courbe C, d'assises 1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$, tangente en A à la courbe C. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.
   (b) Tracer $\mathcal{D}$ et C sur papier millimétré. (Unité graphique : 2 cm).

Exercice 1 Une certaine espèce de coléoptère voit sa population augmenter de 3% par an. Partant d'une population de 9 000 coléoptères, au bout de combien d'années aura-t-on au moins 27 000 coléoptères ?

Exercice 2 M. Jacaranda doit livrer du jus d'orange à M. Jujube qui compose trois cocktails de jus de fruits : le tropique (en quantité x), le cocktail des îles (en quantité y) et le cocktail des mascareignes (en quantité z). Les quantités sont exprimées en litres. Le cocktail le tropique et le cocktail des îles nécessitent chacun 1 litre de jus d'orange et le cocktail des mascareignes nécessite 2 litres de jus d'orange. M.Jacaranda dispose de 200 litres de jus d'orange.

1. Justifier que les contraintes sont données par le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $x + y + 2z = 200$. On admet que les points $A(200, 0, 0)$, $B(0, 200, 0)$ et $C(0, 0, 100)$ appartiennent à (P).
   (a) Représenter (P) et déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace, dont les coordonnées vérifient l'inéquation $x + y + 2z \leq 200$.
   (b) Sans justifier, donner le polyèdre des contraintes de (S).
3. M. Jujube vend autant de litres de cocktails le tropique que de cocktails des îles : on a donc une nouvelle contrainte qui est $x = y$. On note (Q) le plan d'équation $x = y$.
   (a) Démontrer que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D). Calculer les coordonnées de deux points de (D) et tracer cette droite en rouge.
   (b) (Q) coupe le polyèdre des contraintes suivant un triangle. Colorier en rouge l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient à la fois le système de contraintes (S) et la contrainte $x = y$.
   (c) Quelle quantité maximale de cocktails de chaque sorte, M. Jacaranda va-t-il pouvoir fournir ?